DS 3 mathématiques

BCPST 1B 2021-2022

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes :

1. $S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (j-i)$ 2. $T_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} i \cdot j^2$ 3. $U_n = \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} \binom{k}{j} 2^{k-2j}$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{1 \leq k \leq 2n} (-1)^k k^3$ et on cherche à simplifier cette expression.

1. (INFO) Écrire une fonction Python `somme(n)` prenant en argument un entier naturel n et qui renvoie la valeur de S_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $S_n = \left(\sum_{k=1}^{n} (2k)^3\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3\right)$.
3. Soient a, b des réels. Développer $(a+b)^3$.
4. En déduire une expression simplifiée de S_n.

Exercice 3. Soit un paramètre réel a. On considère la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in D_{f_a}, f_a(x) = \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 2ax + a}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f_a. On pourra procéder par disjonction de cas. Dans quel cas f_a est-elle une application ?
2. Déterminer l'ensemble des antécédents de 0 par f_a. On veillera à vérifier que les éléments trouvés appartiennent à D_{f_a}.
3. Étude de la fonction f_1.
   (a) (INFO 1B) Écrire une fonction `trace(n)` prenant en argument un entier naturel n et qui trace le graphe de la fonction f_1 sur le segment $[1, 2]$ en considérant $n+1$ points équirépartis de ce segment.
   (b) La fonction f_1 est-elle injective ? Surjective ? Justifier vos réponses.

Exercice 4. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n}.$$

1. (INFO) Écrire une fonction Python `suite(n)` prenant en argument un entier naturel n et qui renvoie la valeur u_n.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle monotone ? Justifier votre réponse.
4. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1, | u_n - u_{n-1} | \leq \frac{|u_1 - u_0|}{4^{n-1}}$.
5. (INFO) En déduire une fonction `petit_intervalle(a)` prenant en argument un réel strictement positif, et qui renvoie une liste $[u_n, u_{n+1}]$ vérifiant $| u_{n+1} - u_n | < a$.

DS n° 3 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.
Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.
Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.

Exercice 5

Résoudre l'équation d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$ suivante :

$$\cos(10\theta) + \cos(11\theta) + \cos(12\theta) + \cdots + \cos(98\theta) + \cos(99\theta) = 0.$$

Indication : montrer que le membre de gauche est égale à $\dfrac{\cos\left(\frac{109\theta}{2}\right)\sin(45\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ lorsque $\theta \notin \left\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 6

Dans cet exercice, on fixe un entier $n \geqslant 2$ et on souhaite calculer le produit suivant :

$$P = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3+1}{k^3-1}.$$

1. [**Informatique**] Écrire en Python une fonction `produit` qui prend en argument l'entier n et qui renvoie la valeur de P.
2. Résoudre l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Dans la suite de l'exercice, on note j l'unique solution de $z^2 + z + 1 = 0$ de partie imaginaire positive.

3. Écrire j sous forme exponentielle et calculer j^3.
4. Montrer que pour tout $Z \in \mathbb{C}$:
$$Z^3 + 1 = \left(Z+1\right)\left(Z+j\right)\left(Z+j^2\right) \quad \text{et} \quad Z^3 - 1 = \left(Z-1\right)\left(Z-j\right)\left(Z-j^2\right).$$
5. En déduire que :
$$P = \frac{\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n}(k-1)} \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{j+k}{j+k+1}\right)\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{-j+k-1}{-j+k}\right)$$
.
6. Conclure en déterminant une expression simplifiée de P.

Exercice 7

On considère l'ensemble E des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0.$$

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. **[Informatique]** Écrire en Python une fonction `suite(u0,u1,u2,n)` qui prend en arguments trois réels et un entier $n \geqslant 3$ puis qui renvoie la valeur de u_n où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de E de termes initiaux $u_0 =$ `u0`, $u_1 =$ `u1` et $u_2 =$ `u2`.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E telle que $a_0 = 4$, $a_1 = -5$ et $a_2 = 13$. On considère la suite auxiliaire $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a'_n = a_{n+1} + 2a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer a'_0, a'_1 et a'_2.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer a'_{n+2} en fonction de a'_{n+1} et a'_n.
   (c) Montrer par récurrence que $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = -2a_n + 3$.
   (d) Déterminer le terme général de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E telle que $b_0 = 2$, $b_1 = -2$ et $b_2 = 3$. On considère la suite auxiliaire $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $b'_n = b_n - (-2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ b'_{n+2} - 2b'_{n+1} + b'_n = 0$.
   (b) Déterminer le terme général de $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) En déduire le terme général de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 8

On pose :

$$z = \frac{2+i}{2-i}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que le complexe z n'est pas une racine de l'unité, c'est-à-dire que $z^n = 1$ pour aucune valeur de $n \in \mathbb{N}^*$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant l'existence d'un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $z^n = 1$, c'est-à-dire tel que $(2+i)^n = (2-i)^n$. De plus, on pose :

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2-i)^{k-1} (2i)^{n-k}.$$

1. On considère l'ensemble :
$$\mathbb{L} = \left\{ a + ib \in \mathbb{C} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$
   (a) Soient $(z_1, z_2) \in \mathbb{L}^2$. Montrer que $z_1 + z_2 \in \mathbb{L}$ et $z_1 z_2 \in \mathbb{L}$.
   (b) En déduire que $S \in \mathbb{L}$ puis que $|S|^2 \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que $S = \dfrac{(2i)^n}{i-2}$ puis calculer $|S|^2$.
3. Conclure.