DS 3 mathématiques

BCPST 1B 2021-2022

— Durée : 3 heures.

— Documents et calculatrice non autorisés.

— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (j - i)$ 2. $T_n = \displaystyle\sum_{1 \leq i, j \leq n} i \cdot j^2$ 3. $U_n = \displaystyle\sum_{0 \leq j \leq k \leq n} \binom{k}{j} 2^{k-2j}$.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. On a

$$\begin{aligned}
S_n &= \textstyle\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (j - i) \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} (j - i) \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=0}^{j-1} (l) && \text{par le changement de variable } l = j - i \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{j(j-1)}{2} \\
&= \tfrac{1}{2} \left(\textstyle\sum_{j=1}^{n} \left(j^2 - j\right) \right) \\
&= \tfrac{1}{2} \left(\textstyle\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n} j \right) \\
&= \tfrac{1}{2} \left(\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \tfrac{n(n+1)}{2} \right) && \text{d'après les formules usuelles} \\
&= \tfrac{n(n+1)}{12} (2n + 1 - 3) \\
&= \boxed{\frac{n(n+1)(n-1)}{6}.}
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{1\leq i,j\leq n} ij^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij^2 \\
&= \sum_{i=1}^n i\left(\sum_{j=1}^n j^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^n i\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\sum_{i=1}^n i \\
&= \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\cdot\frac{n(n+1)}{2} \\
&= \boxed{\frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}}
\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
U_n &= \sum_{0\leq j\leq k\leq n}\binom{k}{j}2^{k-2j} \\
&= \sum_{k=0}\left(\sum_{j=0}^k\binom{k}{j}2^{k-2j}\right) \\
&= \sum_{k=0}2^k\left(\sum_{j=0}^k\binom{k}{j}\left(\tfrac{1}{4}\right)^j\right) \\
&= \sum_{k=0}^n 2^k\left(1+\tfrac{1}{4}\right)^k && \text{d'après la formule du binôme} \\
&= \sum_{k=0}^n 2^k\cdot\left(\tfrac{5}{4}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^n\cdot\left(\tfrac{5}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

on reconnaît une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{5}{2}\neq 1$. Donc

$$U_n = \frac{1-\left(\frac{5}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{5}{2}}.$$

Donc

$$\boxed{U_n = \frac{2}{3}\cdot\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{n+1}-1\right)}.$$

Exercice 2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{1\leq k\leq 2n}(-1)^k k^3$ et on cherche à simplifier cette expression.

1. (INFO) Écrire une fonction Python `somme(n)` prenant en argument un entier naturel n et qui renvoie la valeur de S_n.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $S_n = \left(\sum\limits_{k=1}^n (2k)^3\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^n (2k-1)^3\right)$.
3. Soient a, b des réels. Développer $(a+b)^3$.
4. En déduire une expression simplifiée de S_n.

Correction

1. Voici la fonction demandée :

```
def somme(n) :
    S = 0
    for k in range(1,2*n+1) :
        S = S + (k**3)*(-1)**k
    return S
```

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$S_n = \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ \text{k pair}}} (-1)^k k^3 \right) + \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ \text{k impair}}} (-1)^k k^3 \right)$$

On effectue le changement de variable $k = 2p$ dans la première somme. On a alors $1 \leq k \leq 2n \iff 1 \leq p \leq n$. car p est un entier. Donc

$$S_n = \left(\sum_{p=1}^{n} (-1)^{2p} (2p)^3 \right) + \left(\sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n \\ \text{k impair}}} (-1)^k k^3 \right)$$

On effectue le changement de variable $k = 2p - 1$ dans la deuxième somme. On a alors : $1 \leq 2p - 1 \leq 2n \iff 1 \leq p \leq n$ car p est un entier.
Donc

$$S_n = \left(\sum_{p=1}^{n} (-1)^{2p} (2p)^3 \right) + \left(\sum_{p=1}^{n} (-1)^{2p-1} (2p-1)^3 \right)$$

D'où

$$\boxed{S_n = \left(\sum_{p=1}^{n} (2p)^3 \right) - \left(\sum_{p=1}^{n} (2p-1)^3 \right)}$$

3. Soient a, b des réels. D'après la formule du binôme et le triangle de Pascal, on obtient :

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3}$$

.

4. On a d'après la question 1,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k)^3 - \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 .$$

En développant à l'aide de la formule trouvée dans la question 2, on trouve

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k)^3 - \sum_{k=1}^{n} \left((2k)^3 - 12k^2 + 6k - 1 \right).$$

Donc en simplifiant :

$$S_n = 12 \sum_{k=1}^{n} k^2 - 6 \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

En appliquant les formules usuelles, on trouve

$$S_n = 2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) + n$$

En factorisant :

$$S_n = n(2(n+1)(2n+1) - 3(n+1) + 1).$$

Donc :

$$S_n = n((n+1)(4n+2-3)+1)$$

Donc :

$$S_n = n((n+1)(4n-1)+1).$$

D'où

$$S_n = n(4n^2+3n)$$

Donc

$$\boxed{S_n = n^2(4n+3)}.$$

Exercice 3. Soit un paramètre réel a. On considère la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in D_{f_a}, f_a(x) = \frac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f_a. On pourra procéder par disjonction de cas. Dans quel cas f_a est-elle une application ?
2. Déterminer l'ensemble des antécédents de 0 par f_a. On veillera à vérifier que les éléments trouvés appartiennent bien au domaine de définition de f_a.
3. Étude de la fonction f_1.
   (a) (INFO 1B) Écrire une fonction `trace(n)` prenant en argument un entier naturel n et qui trace le graphe de la fonction f_1 sur le segment $[1,2]$ en considérant $n+1$ points équirépartis de ce segment.
   (b) La fonction f_1 est-elle injective ? Surjective ? Justifier vos réponses.

Correction

Soit un paramètre réel a. On considère la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in D_{f_a}, f_a(x) = \frac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a}.$$

1. Déterminons le domaine de définition de f_a. Pour cela, déterminons d'abord les solutions d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$x^2+2ax+a=0.$$

   On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = 4a^2-4a = 4a(a-1)$.
   — Cas 1 : $a \in]0,1[$.
   Le discriminant est alors strictement négatif. Donc l'équation n'a pas de solution réelle.
   Dans ce cas, $D_{f_a} = \mathbb{R}$.
   — Cas 2 : $a \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$.
   Le discriminant est alors strictement positif. L'équation admet donc exactement deux solutions :

$$x_1 = \frac{-2a+2\sqrt{a(a-1)}}{2}, x_2 = \frac{-2a-2\sqrt{a(a-1)}}{2}.$$

   Donc

$$x_1 = -a+\sqrt{a(a-1)}, x_2 = -a-\sqrt{a(a-1)}.$$

   On en déduit que $D_{f_a} = \mathbb{R}\backslash\{-a+\sqrt{a(a-1)}, -a-\sqrt{a(a-1)}\}$
   — Cas 3 : $a=0$ L'unique solution de l'équation est donnée par $x_1 = 0$.
   On a alors $D_{f_a} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
   — Cas 4 : $a=1$. L'unique solution de l'équation est donnée par $x=-1$.
   On a alors $D_{f_a} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$
   De l'étude précédente, on en déduit que f_a est une application si et seulement si $a \in]0,1[$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $x \in D_{f_a}$ Raisonnons par équivalence :

$$f_a(x) = 0 \iff x^2-a^2=0 \iff x=a \text{ ou } x=-a.$$

   Vérifions si a et $-a$ sont bien des éléments de D_{f_a}. On se place dans le cas où $a \in \mathbb{R}\backslash]0,1[$. Raisonnons par équivalence :

$$-a = -a+\sqrt{a(a-1)} \iff \sqrt{a(a-1)} = 0 \iff a=0 \text{ ou } a=1.$$

De plus,

$$-a = -a - \sqrt{a(a-1)} \iff a = 0 \text{ ou } a = 1.$$

On en déduit que $-a$ est solution si et seulement si $a \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$. De même :

$$\begin{aligned} a = -a + \sqrt{a(a-1)} &\iff 2a = \sqrt{a(a-1)} \\ &\iff (4a^2 = a^2 - a) \wedge (a \geq 0) \\ &\iff (3a^2 + a = 0) \wedge (a \geq 0) \\ &\iff a = 0 \end{aligned}.$$

De plus,

$$\begin{aligned} a = -a - \sqrt{a(a-1)} &\iff 2a = -\sqrt{a(a-1)} \\ &\iff (4a^2 = a^2 - a) \wedge (a \leq 0) \\ &\iff (3a^2 + a = 0) \wedge (a \leq 0) \\ &\iff a = 0 \text{ ou } a = \tfrac{-1}{3} \end{aligned}.$$

On en déduit que a est solution si et seulement si $a \in \mathbb{R}\backslash\{0, -\frac{1}{3}\}$
En résumé,

- Pour tout $a \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{3}, 0, 1\}$ les antécédents de 0 par f_a sont exactement a et $-a$,
- l'unique antécédent de 0 par f_1 est la valeur 1,
- l'unique antécédent de 0 par $f_{-\frac{1}{3}}$ est la valeur $\frac{1}{3}$,
- 0 n'a pas d'antécédent par f_0.

3. Étude de la fonction f_1.
   (a) Voici la fonction demandée :

```
import matplotlib.pyplot as mpl
def trace(n) :
    L = [1+i/n for i in range(n+1)]
    M = [(x**2-1)/(x**2+2*x+1) for x in L]
    mpl.plot(L,M)
```

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, soit $y \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f_1(x) = y &\iff \tfrac{x^2-1}{x^2+2x+1} = y \\ &\iff \tfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2} = y \\ &\iff \tfrac{x-1}{x+1} = y \\ &\iff x - 1 = y(x+1) \\ &\iff x(1-y) = 1 + y \end{aligned}.$$

On remarque alors pour $y = 1$, cette équation n'a pas de solution. Donc f n'est pas surjective. En supposant que $y \neq 1$, on a alors

$$f_1(x) = y \iff x = \frac{1+y}{1-y}.$$

On remarque alors pour tout $y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, cette équation admet une unique solution. 0n en déduit que pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ $f(x) = y$ admet au plus une unique solution. Donc f est injective.

Exercice 4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}.$$

1. (INFO) Écrire une fonction Python `suite(n)` prenant en argument un entier naturel n et qui renvoie la valeur u_n.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ? Justifier votre réponse.
4. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1, \mid u_n - u_{n-1} \mid \leq \frac{|u_1-u_0|}{4^{n-1}}$.
5. (INFO) En déduire une fonction `petit_intervalle(a)` prenant en argument un réel strictement positif, et qui renvoie une liste $[u_n, u_{n+1}]$ vérifiant $\mid u_{n+1} - u_n \mid < a$.

Correction

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2+u_n}.$$

1. Voici la fonction demandée :

```
def suite(n) :
    u = 1
    for _ in range(n) :
        u = 1/(2+u)
    return u
```

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : u_n > 0$. Démontrons P par récurrence.
   — Initialisation : on a $u_0 = 1 > 0$.
   Donc $P(0)$ est vraie.
   — Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.
   D'après $P(n)$, on a $u_n > 0$. Donc $2 + u_n > 0$. Or l'inverse d'un nombre stricement positif est strictement positif. Autrement dit,
   $$\frac{1}{2+u_n} > 0.$$
   Donc $u_{n+1} > 0$. $P(n+1)$ est bien vérifiée.
   — Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en conlut que
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0}.$$

3. Remarquqons que $u_0 = 1, u_1 = \frac{1}{3}, u_2 = \frac{3}{7}$. On a $u_0 > u_1$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante. De plus, $u_1 < u_2$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.
4. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $P(n) :\mid u_n - u_{n-1} \mid \leq \frac{|u_1-u_0|}{4^{n-1}}$.
   — Initialisation : On a $\mid u_1 - u_0 \mid = \frac{|u_1-u_0|}{4^0}$
   Donc $P(1)$ est vraie.
   — Hérédité : soit n un entier supérieur à 1. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a :
   $$\mid u_{n+1} - u_n \mid = \mid \frac{1}{2+u_n} - \frac{1}{2+u_{n-1}} \mid .$$
   En réduisant au même dénominateur, on obtient
   $$\mid u_{n+1} - u_n \mid = \mid \frac{u_{n-1} - u_n}{(2+u_n)(2+u_{n-1})} \mid .$$
   Or $u_n > 0$ et $u_{n-1} > 0$. Donc $(2+u_n)(2+u_{n-1}) \geq 4$. D'où
   $$\mid u_{n+1} - u_n \mid \leq \mid \frac{u_{n-1} - u_n}{4} \mid .$$
   D'après $P(n)$, on en déduit que
   $$\mid u_{n+1} - u_n \mid \leq \mid \frac{u_{n-1} - u_n}{4} \mid \leq \frac{\mid u_1 - u_0 \mid}{4^n}.$$
   $P(n+1)$ est bien vérifiée.

— Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \geq 1, \mid u_n - u_{n-1} \mid \leq \frac{\mid u_1 - u_0 \mid}{4^{n-1}}}.$$

5. Voici la fonction demandée :

```
def petit_intervalle(a) :
    u0 = 1
    u1 = 1/3
    while abs(u1-u0) > a :
        u0 = u1
        u1 = 1/(2+u1)
    return [u0,u1]
```

Autre possibilité :

```
def petit_intervalle(a) :
    n = 1
    while (2/3)*(1/(4**(n-1))) > a :
        n = n+1
    return [suite(n-1),suite(n)]
```

Corrigé du DS n° 3 de mathématiques et d'informatique

Exercice 5

Résoudre l'équation d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$ suivante :

$$\cos(10\theta) + \cos(11\theta) + \cos(12\theta) + \cdots + \cos(98\theta) + \cos(99\theta) = 0.$$

Indication : montrer que le membre de gauche est égale à $\dfrac{\cos\left(\frac{109\theta}{2}\right)\sin(45\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ *lorsque* $\theta \notin \left\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

► Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
&\cos(10\theta) + \cos(11\theta) + \cos(12\theta) + \cdots + \cos(98\theta) + \cos(99\theta)\\
=&\sum_{n=10}^{99} \cos(n\theta)\\
=&\sum_{n=10}^{99} \mathrm{Re}\Big(e^{in\theta}\Big) \quad \text{car } e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\\
=&\mathrm{Re}\left(\sum_{n=10}^{99} \left(e^{i\theta}\right)^n\right).
\end{aligned}$$

On reconnaît la somme d'une progression géométrique de raison $e^{i\theta}$. On raisonne par disjonction de cas.
<u>1^er^ cas : $e^{i\theta} = 1$</u>, c'est-à-dire $\theta \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ d'après le cercle unité. Dans ce cas :

$$\cos(10\theta) + \cos(11\theta) + \cdots + \cos(99\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=10}^{99} 1^n\right) = \mathrm{Re}\Big(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{99-10+1=90 \text{ fois}}\Big) = 90 \neq 0.$$

Donc l'équation n'a pas de solutions dans $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

N'oubliez pas de distinguer le cas où $e^{i\theta} = 1$ puisque la formule de la somme d'une progression géométrique n'est pas valable dans le cas où la raison est égale à 1.

<u>2^e^ cas : $e^{i\theta} \neq 1$</u>, c'est-à-dire $\theta \notin \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ d'après le cercle unité. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=10}^{99} \left(e^{i\theta}\right)^n &= \sum_{m=0}^{89} \left(e^{i\theta}\right)^{m+10} \quad \text{à l'aide du décalage d'indice } m = n - 10 \iff n = m + 10\\
&= \left(e^{i\theta}\right)^{10} \sum_{m=0}^{89} \left(e^{i\theta}\right)^m \quad \text{par linéarité car } \left(e^{i\theta}\right)^{m+10} = \left(e^{i\theta}\right)^m \left(e^{i\theta}\right)^{10}\\
&= e^{i10\theta} \frac{1 - \left(e^{i\theta}\right)^{90}}{1 - e^{i\theta}} \quad \begin{array}{l}\text{d'après la formule de la somme}\\ \text{d'une progression géométrique car } e^{i\theta} \neq 1\end{array}\\
&= e^{i10\theta} \frac{e^{i0} - e^{i90\theta}}{e^{i0} - e^{i\theta}} \quad \text{car } e^{i0} = 1.
\end{aligned}$$

De plus, on a par factorisation par l'angle moitié et d'après les formules d'Euler :

$$e^{i0} - e^{i90\theta} = e^{i45\theta}\left(e^{-i45\theta} - e^{i45\theta}\right) = e^{i45\theta} 2i\sin(-45\theta) = -2i\sin(45\theta)e^{i45\theta}$$

$$\text{et de même} \quad e^{i0} - e^{i\theta} = -2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\cos(10\theta)+\cos(11\theta)+\cdots+\cos(99\theta) &= \mathrm{Re}\left(e^{i10\theta}\frac{-2i\sin(45\theta)e^{i45\theta}}{-2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2}}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i(10+45-1/2)\theta}\frac{\sin(45\theta)}{\sin(\theta/2)}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i109\theta/2}\frac{\sin(45\theta)}{\sin(\theta/2)}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\left(\cos(\tfrac{109\theta}{2})+i\sin(\tfrac{109\theta}{2})\right)\frac{\sin(45\theta)}{\sin(\theta/2)}\right)\\
&= \cos\left(\tfrac{109\theta}{2}\right)\frac{\sin(45\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
& \cos(10\theta)+\cos(11\theta)+\cos(12\theta)+\cdots+\cos(98\theta)+\cos(99\theta)=0\\
\iff\ & \cos\left(\tfrac{109\theta}{2}\right)\frac{\sin(45\theta)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}=0\\
\iff\ & \cos\left(\tfrac{109\theta}{2}\right)=0 \quad \text{ou} \quad \sin(45\theta)=0\\
\iff\ & \exists k\in\mathbb{Z},\quad \tfrac{109\theta}{2}=\tfrac{\pi}{2}+k\pi \quad \text{ou} \quad 45\theta=k\pi\\
\iff\ & \exists k\in\mathbb{Z},\quad \theta=\tfrac{\pi}{109}+\tfrac{2k\pi}{109} \quad \text{ou} \quad \theta=\tfrac{k\pi}{45}.
\end{aligned}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{\tfrac{\pi}{109}+\tfrac{2k\pi}{109}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\tfrac{k\pi}{45}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\setminus\left\{2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$

N'oubliez pas de retirer les valeurs de θ du 1er cas.

Exercice 6

Dans cet exercice, on fixe un entier $n\geqslant 2$ et on souhaite calculer le produit suivant :

$$P=\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3+1}{k^3-1}.$$

1. ***[Informatique]** Écrire en Python une fonction* `produit` *qui prend en argument l'entier n et qui renvoie la valeur de P.*

   ▶ Par exemple :

```
def produit(n):
    P=1
    for k in range(2,n+1):
        P=P*((k**3+1)/(k**3-1))
    return P
```

2. *Résoudre l'équation $z^2+z+1=0$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.*

   ▶ On reconnaît une équation du second degré à coefficients réels. Son discriminant est égal à :

$$\Delta=1^2-4\times1\times1=-3<0.$$

L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z=\boxed{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}} \quad \text{ou} \quad z=\boxed{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}.$$

Dans la suite de l'exercice, on note j l'unique solution de $z^2+z+1=0$ de partie imaginaire positive.

3. *Écrire j sous forme exponentielle et calculer j^3.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a $j = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Donc :

$$|j| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1.$$

On cherche un argument θ de j. On a $j = |j|e^{i\theta} = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, donc :

$$\cos(\theta) = \frac{-1}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

D'après le cercle trigonométrique, on en déduit qu'on peut choisir par exemple $\theta = \frac{2\pi}{3}$, ainsi :

$$\boxed{j = e^{i2\pi/3}}.$$

Et donc :

$$j^3 = \left(e^{i2\pi/3}\right)^3 = e^{i2\pi} = \boxed{1}.$$

4. *Montrer que pour tout $Z \in \mathbb{C}$:*

$$Z^3+1 = \big(Z+1\big)\big(Z+j\big)\big(Z+j^2\big) \quad \text{et} \quad Z^3-1 = \big(Z-1\big)\big(Z-j\big)\big(Z-j^2\big).$$

▶ Soit $Z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned}\big(Z+1\big)\big(Z+j\big)\big(Z+j^2\big) &= \big(Z^2+jZ+Z+j\big)\big(Z+j^2\big)\\ &= Z^3+j^2Z^2+jZ^2+j^3Z+Z^2+j^2Z+jZ+j^3\\ &= Z^3+\big(j^2+j+1\big)Z^2+j\big(j^2+j+1\big)Z+j^3.\end{aligned}$$

Or $j^3=1$ d'après le résultat de la question précédente et $j^2+j+1=0$ car j est une solution de l'équation $z^2+z+1=0$ d'après le résultat de la question 2. Par conséquent :

$$\boxed{\big(Z+1\big)\big(Z+j\big)\big(Z+j^2\big) = Z^3+1}.$$

De même, on a :

$$\big(Z-1\big)\big(Z-j\big)\big(Z-j^2\big) = Z^3-\big(j^2+j+1\big)Z^2+j\big(j^2+j+1\big)Z-j^3 = \boxed{Z^3-1}.$$

5. *En déduire que :*

$$P = \frac{\prod_{k=2}^n (k+1)}{\prod_{k=2}^n (k-1)} \left(\prod_{k=2}^n \frac{j+k}{j+k+1}\right)\left(\prod_{k=2}^n \frac{-j+k-1}{-j+k}\right)$$

.

▶ On a :

$$\begin{aligned}P &= \prod_{k=2}^n \frac{k^3+1}{k^3-1}\\ &= \prod_{k=2}^n \frac{(k+1)(k+j)(k+j^2)}{(k-1)(k-j)(k-j^2)} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente.}\end{aligned}$$

De plus, $j^2+j+1=0$ donc $j^2=-j-1$ car j est une solution de l'équation $z^2+z+1=0$ d'après le résultat de la question 2. Donc :

$$\begin{aligned}P &= \prod_{k=2}^n \frac{(k+1)(k+j)(k-j-1)}{(k-1)(k-j)(k-(-j-1))}\\ &= \prod_{k=2}^n \frac{(k+1)(j+k)(-j+k-1)}{(k-1)(-j+k)(j+k+1)}\\ &= \boxed{\frac{\prod_{k=2}^n (k+1)}{\prod_{k=2}^n (k-1)} \left(\prod_{k=2}^n \frac{j+k}{j+k+1}\right)\left(\prod_{k=2}^n \frac{-j+k-1}{-j+k}\right)} \quad \text{par multiplicativité du produit.}\end{aligned}$$

6. *Conclure en déterminant une expression simplifiée de P.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n}(k+1) &= \prod_{\ell=3}^{n+1}\ell \quad \text{à l'aide du décalage d'indice } \ell=k+1\\
&= \frac{\prod_{\ell=1}^{n+1}\ell}{\prod_{\ell=1}^{2}\ell} \quad \text{par associativité}\\
&= \frac{(n+1)!}{1\times 2} \quad \text{en reconnaissant la définition de la factorielle}\\
&= \frac{(n+1)!}{2}.
\end{aligned}$$

De même :

$$\prod_{k=2}^{n}(k-1) = \prod_{\ell=1}^{n-1}\ell = (n-1)!.$$

D'autre part :

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{j+k}{j+k+1} = \frac{j+2}{j+n+1} \quad \text{en reconnaissant un produit télescopique.}$$

De même :

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{-j+k-1}{-j+k} = \frac{-j+1}{-j+n}.$$

D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
P &= \frac{\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\prod_{k=2}^{n}(k-1)}\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{j+k}{j+k+1}\right)\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{-j+k-1}{-j+k}\right)\\
&= \frac{\frac{(n+1)!}{2}}{(n-1)!}\left(\frac{j+2}{j+n+1}\right)\left(\frac{-j+1}{-j+n}\right)\\
&= \frac{\overbrace{(n+1)!}^{=(n-1)!\times n\times(n+1)}}{2(n-1!)} \times \frac{(j+2)(-j+1)}{(j+n+1)(-j+n)}\\
&= \frac{n(n+1)}{2}\times\frac{-j^2-j+2}{-j^2-j+n(n+1)}\\
&= \frac{n(n+1)}{2}\times\frac{j+1-j+2}{j+1-j+n(n+1)} \quad \text{car } j^2+j+1=0 \text{ donc } -j^2=j+1\\
&= \frac{n(n+1)}{2}\times\frac{3}{n^2+n+1}\\
&= \boxed{\frac{3n(n+1)}{2(n^2+n+1)}}.
\end{aligned}$$

N'oubliez pas de simplifier l'expression finale qui ne doit plus contenir le nombre complexe j puisque P est réel comme produit de nombres réels.

Exercice 7

On considère l'ensemble E des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+3}-3u_{n+1}+2u_n=0.$$

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1. *[**Informatique**] Écrire en Python une fonction* `suite(u0,u1,u2,n)` *qui prend en arguments trois réels et un entier $n \geqslant 3$ puis qui renvoie la valeur de u_n où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de E de termes initiaux $u_0 =$ `u0`, $u_1 =$ `u1` et $u_2 =$ `u2`.*

   ▶ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

   Donc :

```
def suite(u0,u1,u2,n):
    for k in range(3,n+1):
        u=3*u1-2*u0
        u0=u1
        u1=u2
        u2=u
    return u
```

2. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E telle que $a_0 = 4$, $a_1 = -5$ et $a_2 = 13$. On considère la suite auxiliaire $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a'_n = a_{n+1} + 2a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

   (a) *Calculer a'_0, a'_1 et a'_2.*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned} a'_0 &= a_1 + 2a_0 = -5 + 2 \times 4 = \boxed{3}, \\ a'_1 &= a_2 + 2a_1 = 13 + 2 \times (-5) = \boxed{3}, \\ a'_2 &= a_3 + 2a_2. \end{aligned}$$

   Or, puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E, on a :

$$a_3 - 3a_1 + 2a_0 \quad \text{donc} \quad a_3 = 3a_1 - 2a_0 = 3 \times (-5) - 2 \times 4 = -23.$$

   Donc :

$$a'_2 = a_3 + 2a_2 = -23 + 2 \times 13 = \boxed{3}.$$

   (b) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer a'_{n+2} en fonction de a'_{n+1} et a'_n.*

   ▶ Puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E, on a :

$$a_{n+3} - 3a_{n+1} + 2a_n \quad \text{donc} \quad a_{n+3} = 3a_{n+1} - 2a_n.$$

   On a :

$$\begin{aligned} a'_{n+2} &= a_{n+3} + 2a_{n+2} \\ &= 3a_{n+1} - 2a_n + 2a_{n+2} \\ &= 2\Big(\underbrace{a_{n+2} + 2a_{n+1}}_{=a'_{n+1}}\Big) - 4a_{n+1} + 3a_{n+1} - 2a_n \\ &= 2a'_{n+1} - \Big(\underbrace{a_{n+1} + 2a_n}_{=a'_n}\Big) \\ &= \boxed{2a'_{n+1} - a'_n}. \end{aligned}$$

   (c) *Montrer par récurrence que $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ a_{n+1} = -2a_n + 3$.*

▶ On raisonne par récurrence double pour montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a'_n = 3$.
Initialisation. Pour $n = 0$ et $n = 1$ on a d'après le résultat de la question 2(a) : $a'_0 = a'_1 = 3$.
Hérédité. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $a'_n = a'_{n+1} = 3$. On a :

$$\begin{aligned} a'_{n+2} &= 2a'_{n+1} - a'_n \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\ &= 2 \times 3 - 3 \quad \text{par hypothèses de récurrence} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Donc le résultat est vrai au rang $n+2$ s'il est vrai aux rangs n et $n+1$, et cette implication est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence double, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ a'_n = 3$. En particulier, la suite $\boxed{(a'_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante}}$. Par conséquent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après la définition de la suite $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_{n+1} + 2a_n = a'_n = 3 \quad \text{donc} \quad \boxed{a_{n+1} = -2a_n + 3}.$$

(d) *Déterminer le terme général de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
▶ D'après le résultat de la question précédente, on reconnaît une suite arithmético-géométrique. On commence par résoudre l'équation suivante d'inconnue $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha = -2\alpha + 3 \iff 3\alpha = 3 \iff \alpha = 1.$$

Puis on pose la suite auxiliaire $(a''_n = a_n - \alpha = a_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le résultat de la question précédente :

$$a''_{n+1} = a_{n+1} - 1 = -2a_n + 3 - 1 = -2a_n + 2 = -2(a_n - 1) = -2a''_n.$$

On reconnaît une suite géométrique de raison -2. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a''_n = (-2)^n a''_0 = (-2)^n(a_0 - 1) = (-2)^n(4-1) = 3(-2)^n.$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = a''_n + 1 = \boxed{3(-2)^n + 1}.$$

3. *Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E telle que $b_0 = 2$, $b_1 = -2$ et $b_2 = 3$. On considère la suite auxiliaire $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $b'_n = b_n - (-2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

(a) *Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ b'_{n+2} - 2b'_{n+1} + b'_n = 0$.*
▶ Initialisation. On a :

$$\begin{aligned} b'_0 &= b_0 - (-2)^0 = 2 - 1 = 1, \\ b'_1 &= b_1 - (-2)^1 = -2 + 2 = 0, \\ b'_2 &= b_2 - (-2)^2 = 3 - 4 = -1. \end{aligned}$$

Donc :

$$b'_2 - 2b'_1 + b'_0 = -1 - 2 \times 0 + 1 = 0.$$

Donc la relation est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $b'_{n+2} - 2b'_{n+1} + b'_n = 0$. On a :

$$\begin{aligned}
& b'_{n+3} - 2b'_{n+2} + b'_{n+1} \\
=& b_{n+3} - (-2)^{n+3} - 2\Big(b_{n+2} - (-2)^{n+2}\Big) + b_{n+1} - (-2)^{n+1} \quad \text{par définition de } (b'_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
=& b_{n+3} - 2b_{n+2} + b_{n+1} - (-2)^n\Big((-2)^3 - 2(-2)^2 + (-2)\Big) \\
=& \Big(\underbrace{b_{n+3} - 3b_{n+1} + 2b_n}_{=0}\Big) + 3b_{n+1} - 2b_n - 2b_{n+2} + b_{n+1} - (-2)^n(-8-8-2) \\
=& -2b_{n+2} + 4b_{n+1} - 2b_n + 18(-2)^n \quad \text{car } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ appartient à } E \\
=& -2\Big(\underbrace{b_{n+2} - (-2)^{n+2}}_{=b'_{n+2}}\Big) - 2(-2)^{n+2} + 4\Big(\underbrace{b_{n+1} - (-2)^{n+1}}_{=b'_{n+1}}\Big) + 4(-2)^{n+1} \\
& \qquad - 2\Big(\underbrace{b_n - (-2)^n}_{=b'_n}\Big) - 2(-2)^n + 18(-2)^n \\
=& -2b'_{n+2} + 4b'_{n+1} - 2b'_n + (-2)^n\Big(-2(-2)^2 + 4(-2) - 2\Big) \\
& \qquad + 18(-2)^n \quad \text{par définition de } (b'_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
=& -2\Big(\underbrace{b'_{n+2} - 2b'_{n+1} + b'_n}_{=0}\Big) + (-2)^n(-8-8-2) + 18(-2)^n \\
=& -18(-2)^n + 18(-2)^n \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
=& 0.
\end{aligned}$$

Donc la relation est vraie au rang $n+1$ si elle est vraie au rang n, et cette implication est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b'_{n+2} - 2b'_{n+1} + b'_n = 0}$.

(b) *Déterminer le terme général de $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre deux. On commence par résoudre l'équation suivante d'inconnue $q \in \mathbb{C}$:

$$q^2 - 2q + 1 = 0 \iff (q-1)^2 = 0 \iff q - 1 = 0 \iff q = 1 \quad \text{en reconnaissant une identité remarquable.}$$

Puisque cette équation du second degré à coefficients réels admet une unique solution, on en déduit que son discriminant est égal à zéro et qu'il existe deux constantes $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b'_n = (\lambda + \mu n)1^n = \lambda + \mu n.$$

Pour déterminer les constantes λ et μ, on utilise les premiers termes $b'_0 = 1$ et $b'_1 = 0$ calculés à la question précédente (initialisation de la récurrence) :

$$1 = b'_0 = \lambda + \mu \times 0 = \lambda \quad \text{et} \quad 0 = b'_1 = \lambda + \mu \times 1 = \lambda + \mu \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -\lambda = -1. \end{cases}$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{b'_n = 1 - n}.$$

(c) *En déduire le terme général de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

▶ D'après le résultat de la question précédente et la définition de $(b'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = b'_n + (-2)^n = \boxed{1 - n + (-2)^n}.$$

Exercice 8

On pose :

$$z = \frac{2+i}{2-i}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que le complexe z n'est pas une racine de l'unité, c'est-à-dire que $z^n = 1$ pour aucune valeur de $n \in \mathbb{N}^*$. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant l'existence d'un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $z^n = 1$, c'est-à-dire tel que $(2+i)^n = (2-i)^n$. De plus, on pose :

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2-i)^{k-1}(2i)^{n-k}.$$

1. *On considère l'ensemble :*

$$\mathbb{L} = \left\{ a + ib \in \mathbb{C} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

(a) *Soient $(z_1, z_2) \in \mathbb{L}^2$. Montrer que $z_1 + z_2 \in \mathbb{L}$ et $z_1 z_2 \in \mathbb{L}$.*

► Puisque z_1 et z_2 appartiennent à $\mathbb{L}$, on peut poser $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ où $(a_1, b_1) \in \mathbb{Z}^2$ et $(a_2, b_2) \in \mathbb{Z}^2$. On a :

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{=a} + i \underbrace{(b_1 + b_2)}_{=b}.$$

Or $a_1 + a_2$ et $b_1 + b_2$ sont des entiers comme sommes d'entiers, donc $(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \in \mathbb{Z}^2$. Par conséquent, $\boxed{z_1 + z_2 \in \mathbb{L}}$. De même :

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = \underbrace{(a_1 a_2 - b_1 b_2)}_{=a} + i \underbrace{(a_1 b_2 + a_2 b_1)}_{=b}.$$

Donc $(a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1) \in \mathbb{Z}^2$ comme sommes et produits d'entiers. Par conséquent, $\boxed{z_1 z_2 \in \mathbb{L}}$.

En généralisant, on a donc démontré que toute somme et tout produit d'éléments quelconques de $\mathbb{L}$ appartient à $\mathbb{L}$.

(b) *En déduire que $S \in \mathbb{L}$ puis que $|S|^2 \in \mathbb{Z}$.*

► On a $2 - i \in \mathbb{L}$ car $(2, -1) \in \mathbb{Z}^2$ et $2i \in \mathbb{L}$ car $(0, 2) \in \mathbb{Z}^2$. Donc pour tout $k \in \{1, 2 \ldots, n-1\}$:

$$(2-i)^{k-1} = \underbrace{\underbrace{(2-i)}_{\in \mathbb{L}} \times \underbrace{(2-i)}_{\in \mathbb{L}} \times \cdots \times \underbrace{(2-i)}_{\in \mathbb{L}}}_{k-1 \text{ fois}} \in \mathbb{L} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}$$

$$\text{et de même} \quad (2i)^{n-k} = \underbrace{\underbrace{2i}_{\in \mathbb{L}} \times \underbrace{2i}_{\in \mathbb{L}} \times \cdots \times \underbrace{2i}_{\in \mathbb{L}}}_{n-k \text{ fois}} \in \mathbb{L}.$$

Par conséquent :

$$\underbrace{(2-i)^{k-1}}_{\in \mathbb{L}} \times \underbrace{(2i)^{n-k}}_{\in \mathbb{L}} \in \mathbb{L} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente.}$$

De plus, on sait que $\binom{n}{k} \in \mathbb{Z}$, donc les parties réelle et imaginaire de $\binom{n}{k}(2-i)^{k-1}(2i)^{n-k}$ sont des entiers comme produits d'entiers. Donc $\binom{n}{k}(2-i)^{k-1}(2i)^{n-k} \in \mathbb{L}$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2-i)^{k-1}(2i)^{n-k} \\ &= \underbrace{\binom{n}{1}(2-i)^{1-1}(2i)^{n-1}}_{\in \mathbb{L}} + \underbrace{\binom{n}{2}(2-i)^{2-1}(2i)^{n-2}}_{\in \mathbb{L}} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n-1}(2-i)^{n-1-1}(2i)^{n-(n-1)}}_{\in \mathbb{L}} \\ &\in \mathbb{L} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente.} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{S \in \mathbb{L}}$. On peut donc poser $S = a + ib$ où $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Par définition du module, on a :

$$|S|^2 = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2 + b^2.$$

Donc $\boxed{|S|^2 \in \mathbb{Z}}$ comme somme de carrés d'entiers.

2. *Montrer que $S = \dfrac{(2i)^n}{i-2}$ puis calculer $|S|^2$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2-i)^{k-1}(2i)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2-i)^{k-1}(2i)^{n-k} - \binom{n}{0}(2-i)^{0-1}(2i)^{n-0} - \binom{n}{n}(2-i)^{n-1}(2i)^{n-n} && \text{par associativité} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(2-i)^k}{2-i}(2i)^{n-k} - \frac{(2i)^n}{2-i} - \frac{(2-i)^n}{2-i} && \text{car } \tbinom{n}{0} = \tbinom{n}{n} = 1 \text{ et par propriétés des puissances} \\
&= \frac{1}{2-i} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2-i)^k (2i)^{n-k} + \frac{(2i)^n}{i-2} - \frac{(2-i)^n}{2-i} && \text{par linéarité} \\
&= \frac{1}{2-i}\Big((2-i)+2i\Big)^n + \frac{(2i)^n}{i-2} - \frac{(2-i)^n}{2-i} && \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\
&= \frac{(2-i)^n}{2-i} + \frac{(2i)^n}{i-2} - \frac{(2-i)^n}{2-i} \\
&= \boxed{\frac{(2i)^n}{i-2}}.
\end{aligned}$$

D'après les propriétés du module, on en déduit que :

$$|S|^2 = \left|\frac{(2i)^n}{i-2}\right|^2 = \frac{\left(|2i|^2\right)^n}{|i-2|^2} = \frac{(0^2+2^2)^n}{(-2)^2+1^2} = \boxed{\frac{4^n}{5}}.$$

3. *Conclure.*

▶ Puisque 4 est un entier pair, 4^n aussi. Puisque 5 est un entier impair, on en déduit que $|S|^2 = 4^n/5$ n'est pas un entier d'après le résultat de la question précédente. Or on a montré que $|S|^2 \in \mathbb{Z}$ à la question 1(b), donc c'est absurde. Par conséquent, on vient de démontrer par l'absurde qu'il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $z^n = 1$. Autrement dit, $\boxed{z = (2+i)/(2-i) \text{ n'est pas une racine de l'unité}}$.