Exercices

Exercice 1. Imaginez-vous ethnologue. Vous étudiez une peuplade primitive qui présente un comportement manichéen extrême : lorsque plusieurs personnes participent à une même conversation sur un sujet donné, elles vont toutes avoir le même comportement manichéen tant que la conversation reste sur le même sujet, c'est-à-dire que toutes les affirmations seront soit des vérités, soit des mensonges. Par contre, si le sujet de la conversation change, la nature des affirmations, soit mensonge, soit vérité, peut changer, mais toutes les affirmations seront de la même nature tant que le sujet ne changera pas à nouveau. Pour être autorisé à séjourner dans cette peuplade, vous devez respecter cette règle. Vous participez à une conversation avec trois de leurs membres que nous appellerons X, Y et Z. Ceux-ci vous indiquent comment rejoindre leur village. Si vous n'arrivez pas à le rejoindre, vous ne serez pas autorisé à y séjourner.

Le premier sujet abordé est la région dans laquelle se trouve le village :

— X indique : ≪ Le village se trouve dans la vallée ≫ ;
— Z réplique : ≪ Non, il ne s'y trouve pas ≫ ;
— X reprend : ≪ Ou alors dans les collines ≫.

Nous noterons V et C les variables propositionnelles associées à la région dans laquelle se trouve le village. Nous noterons X_1 et Z_1 les formules propositionnelles correspondant aux affirmations de X et de Z sur le premier sujet.

Puis, le second sujet est abordé : le chemin qui permet de rejoindre le village dans la région concernée.

— X dit : ≪ Le chemin de gauche conduit au village ≫ ;
— Z répond : ≪ Tu as raison ≫ ;
— X complète : ≪ Le chemin de droite y conduit aussi ≫ ;
— Y affirme : ≪ Si le chemin du milieu y conduit, alors celui de droite n'y conduit pas ≫ ;
— Z indique : ≪ Celui du milieu n'y conduit pas ≫.

Nous noterons G, M, D les variables propositionnelles correspondant respectivement au fait que le chemin de gauche, du milieu et de droite, conduit au village. Nous noterons X_2, Y_2 et Z_2 les formules propositionnelles correspondant aux affirmations de X, de Y et de Z sur le second sujet.

1. Représenter le comportement manichéen des interlocuteurs dans le premier sujet abordé sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des formules propositionnelles X_1 et Z_1.
2. Représenter les informations données par les participants sous la forme de deux formules du calcul des propositions X_1 et Z_1 dépendant des variables V et C.
3. En utilisant la résolution avec les propriétés des opérateurs booléens et les formules de De Morgan en calcul des propositions, déterminer dans quelle région vous devez vous rendre pour rejoindre le village.
4. Représenter le comportement manichéen des interlocuteurs dans le second sujet abordé sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des formules propositionnelles X_2, Y_2 et Z_2.
5. Représenter les informations données par les participants sous la forme de trois formules du calcul des propositions X_2, Y_2 et Z_2 dépendant des variables G , M et D.
6. En utilisant la résolution avec les tables de vérité en calcul des propositions, déterminer quel chemin vous devez suivre pour rejoindre le village.
7. En admettant que les trois participants aient menti, pouviez-vous prendre d'autres chemins ?

Exercice 2. Pour toute partie A de $\mathbb{N}^\star$, on note :

1. P_1 : 2 est un élément de A,
2. P_2 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est un élément de A alors n est un élément de A,
3. P_3 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n est un élément de A alors $(n+5)^2$est un élément de A.

On pose $S = \displaystyle\bigcup_{k\in\{2,3,4,6\}} \{k+5n, n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que S vérifie P_1, P_2, P_3.
2. Soit T un ensemble vérifiant P_1, P_2, P_3.
   (a) Soit $a \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que si $a \in T$ alors $a+5 \in T$.

(b) En déduire P_4 : si a est un élément de T alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a + 5n$ est un élément de T.

(c) Montrer que si 16 est un élément de T alors $3, 4, 6$ sont des éléments de T.

(d) Montrer que 2916 est un élément de T puis que 65536 est un élément de T. On pourra remarquer que 2916 est égal à 54^2.

(e) En déduire que $3, 4, 6$ sont des éléments de T.

(f) Prouver alors que $S \subset T$.

Exercice 3. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit qu'il est symétrique s'il est non vide et :

$$\forall a \in A, -a \in A.$$

1. Indiquer sans justifier pour chacun de ces ensembles s'ils sont symétriques ou non.

   (a) $\mathbb{R}$ (b) $[0, 1[$ (c) $[-1, 1]$ (d) $[-1, 1[$.

2. Montrer que si un ensemble est symétrique alors pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, si $-x \in A$ alors $x \in A$.
3. Soit A un ensemble symétrique. Montrer que si A admet comme borne supérieure M alors il admet comme borne inférieure $-M$. Qu'en est-il de la réciproque ? Justifier.
4. Montrer que si un ensemble symétrique admet comme maximum M alors il admet comme minimum $-M$. Qu'en est-il de la réciproque ? Justifier.
5. Déterminer tous les intervalles qui sont des ensembles symétriques.
6. Déterminer les ensembles symétriques dont la borne inférieure est égale à la borne supérieure.

Exercice 4. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. On dit que A est un ensemble ouvert s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que tout entier $n \geq p$ est un élément de A.

1. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Écrire avec une expression logique que A est un ensemble ouvert de $\mathbb{N}$.
2. Soient A, B deux ensembles ouverts de $\mathbb{N}$.

   (a) Montrer que $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ est un ensemble ouvert.

   (b) Montrer que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ est un ensemble ouvert.

3. L'ensemble $P = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$ est-il ouvert ? Le justifier.
4. Soit A un ensemble ouvert de $\mathbb{N}$. On définit le "départ" de A par le plus petit entier p tel que tout entier $n \geq p$ est un élément de A. On veut montrer que le départ de A existe et est bien unique. Pour les questions a, b, c, on fixe A un ensemble ouvert.

   (a) Montrer que si un départ de A existe alors il est unique.

   (b) On pose $N_A = \{p \in A | \forall n \geq p, n \in A\}$. Justifier que N_A est non vide.

   (c) En déduire que N_A admet un plus petit élément m. Montrer que m est le départ de A.

5. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Montrer que A est un ensemble ouvert si et seulement si le complémentaire de A dans $\mathbb{N}$ est fini.
6. Soit A un ensemble ouvert de $\mathbb{N}$. Montrer que si un entier p est le départ de A alors $p - 1$ n'est pas un élément de A.
7. Soient A, B deux ensembles ouverts de $\mathbb{N}$. On note respectivement p_1 et p_2 le départ de A et de B.

   (a) Montrer que le départ de $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ est égal à $\max(p_1, p_2)$ (plus grand élément entre p_1 et p_2) .

   (b) Montrer que le départ de $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ est inférieur à $\min(p_1, p_2)$ (plus petit élément entre p_1 et p_2).

   (c) Expliciter un exemple où le départ de $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ est strictement plus petit que $\min(p_1, p_2)$.

8. Déterminer tous les ensembles ouverts de $\mathbb{N}$ ayant comme départ 3. On donnera la liste exhaustive sans justification.