Exercices : logique, ensembles et raisonnements

Exercice 1. Imaginez-vous ethnologue. Vous étudiez une peuplade primitive qui présente un comportement manichéen extrême : lorsque plusieurs personnes participent à une même conversation sur un sujet donné, elles vont toutes avoir le même comportement manichéen tant que la conversation reste sur le même sujet, c'est-à-dire que toutes les affirmations seront soit des vérités, soit des mensonges. Par contre, si le sujet de la conversation change, la nature des affirmations, soit mensonge, soit vérité, peut changer, mais toutes les affirmations seront de la même nature tant que le sujet ne changera pas à nouveau. Pour être autorisé à séjourner dans cette peuplade, vous devez respecter cette règle. Vous participez à une conversation avec trois de leurs membres que nous appellerons X, Y et Z. Ceux-ci vous indiquent comment rejoindre leur village. Si vous n'arrivez pas à le rejoindre, vous ne serez pas autorisé à y séjourner.

Le premier sujet abordé est la région dans laquelle se trouve le village :

— X indique : « Le village se trouve dans la vallée » ;
— Z réplique : « Non, il ne s'y trouve pas » ;
— X reprend : « Ou alors dans les collines ».

Nous noterons V et C les variables propositionnelles associées à la région dans laquelle se trouve le village. Nous noterons X_1 et Z_1 les formules propositionnelles correspondant aux affirmations de X et de Z sur le premier sujet.

Puis, le second sujet est abordé : le chemin qui permet de rejoindre le village dans la région concernée.

— X dit : « Le chemin de gauche conduit au village » ;
— Z répond : « Tu as raison » ;
— X complète : « Le chemin de droite y conduit aussi » ;
— Y affirme : « Si le chemin du milieu y conduit, alors celui de droite n'y conduit pas » ;
— Z indique : « Celui du milieu n'y conduit pas ».

Nous noterons G, M, D les variables propositionnelles correspondant respectivement au fait que le chemin de gauche, du milieu et de droite, conduit au village. Nous noterons X_2, Y_2 et Z_2 les formules propositionnelles correspondant aux affirmations de X, de Y et de Z sur le second sujet.

1. Représenter le comportement manichéen des interlocuteurs dans le premier sujet abordé sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des formules propositionnelles X_1 et Z_1.
2. Représenter les informations données par les participants sous la forme de deux formules du calcul des propositions X_1 et Z_1 dépendant des variables V et C.
3. En utilisant la résolution avec les propriétés des opérateurs booléens et les formules de De Morgan en calcul des propositions, déterminer dans quelle région vous devez vous rendre pour rejoindre le village.
4. Représenter le comportement manichéen des interlocuteurs dans le second sujet abordé sous la forme d'une formule du calcul des propositions dépendant des formules propositionnelles X_2, Y_2 et Z_2.
5. Représenter les informations données par les participants sous la forme de trois formules du calcul des propositions X_2, Y_2 et Z_2 dépendant des variables G , M et D.
6. En utilisant la résolution avec les tables de vérité en calcul des propositions, déterminer quel chemin vous devez suivre pour rejoindre le village.
7. En admettant que les trois participants aient menti, pouviez-vous prendre d'autres chemins ?

Correction

1. On représente ce comportement par la formule
$$P_1 = (X_1 \wedge Z_1) \vee (\neg X_1 \wedge \neg Z_1)\,.$$
2. On a :
$$X_1 : V \vee C \text{ et } Z_1 : \neg V.$$
3. On a :
$$(X_1 \wedge Z_1) \vee (\neg X_1 \wedge \neg Z_1) \quad = \quad (((V \vee C)) \wedge \neg V) \vee (\neg (V \vee C) \wedge \neg (\neg V))\ .$$

En appliquant les différentes lois logiques, on trouve que

$$P = (C \wedge \neg V) \vee ((\neg V \wedge \neg C) \wedge V).$$

D'où $\boxed{P = C \wedge \neg V}$. On en déduit que le chemin menant au village passe par les collines et non par la vallée.

4. De la même façon, on trouve la formule

$$P_2 = (X_2 \wedge Y_2 \wedge Z_2) \vee (\neg X_2 \wedge \neg Y_2 \wedge \neg Z_2).$$

5. On a :

$$X_2 = G \wedge D, Y_2 = M \implies \neg D, Z_2 = G \wedge \neg M.$$

6. Dressons la table de vérité de P_2 :

G	M	D	X_2	Y_2	Z_2	P_2
V	V	V	V	F	F	F
V	V	F	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F	F

On en déduit qu'il y a deux possibilités :
— les chemins de gauche et de droite mènent au village
— ou les chemins du milieu et de droite mènent au village.
Dans tous les cas, le chemin de droite mène au village.

7. En admettant que les trois participants aient menti, on peut prendre le chemin du milieu.

Exercice 2. Pour toute partie A de $\mathbb{N}^\star$, on note :

1. P_1 : 2 est un élément de A,
2. P_2 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est un élément de A alors n est un élément de A,
3. P_3 : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n est un élément de A alors $(n+5)^2$est un élément de A.

On pose $S = \bigcup_{k \in \{2,3,4,6\}} \{k + 5n, n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que S vérifie P_1, P_2, P_3.
2. Soit T un ensemble vérifiant P_1, P_2, P_3.
   (a) Soit $a \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que si $a \in T$ alors $a + 5 \in T$.
   (b) En déduire P_4 : si a est un élément de T alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a + 5n$ est un élément de T.
   (c) Montrer que si 16 est un élément de T alors $3, 4, 6$ sont des éléments de T.
   (d) Montrer que 2916 est un élément de T puis que 65536 est un élément de T. On pourra remarquer que 2916 est égal à 54^2.
   (e) En déduire que $3, 4, 6$ sont des éléments de T.
   (f) Prouver alors que $S \subset T$.

Correction

1. — On a $2 = 2 + 5 \times 0$. Donc $2 \in S$ et S vérifie P_1.
   — Montrons que S vérifie P_2. On procède par la contraposée. Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $n \notin A$.
   (a) Cas 1 : n est multiple de 5. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $n = 5p$. Donc $n^2 = 25p^2 = 5 \cdot (5p^2)$ Or les multiples de 5 ne sont pas des éléments de A. Donc $n^2 \notin A$.
   (b) Cas 2 : $n = 1$. On a alors $1^2 = 1 \notin A$.
   Par disjonction de cas, on en déduit que $n^2 \notin A$.
   Le raisonnement effectué étant vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que S vérifie P_2.

— Montrons que S vérifie P_3. Remarquons que

$$2^2 = 4 = 5 \cdot 0 + 4, 3^2 = 9 = 5 \cdot 1 + 4, 4^2 = 16 = 5 \cdot 2 + 6, 6^2 = 36 = 5 \cdot 6 + 6.$$

Ces différents carrés sont donc des éléments de S.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $n \in S$. Montrons que $(n+5)^2 \in S$. Par hypothèse, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \{2,3,4,6\}$ vérifiant $n = 5 \cdot p + k$. Donc

$$\begin{array}{rcl} (n+5)^2 & = & (5 \cdot p + k + 5)^2 \\ & = & (5(p+1) + k)^2 \\ & = & 5 \cdot \left(5 \cdot (p+1)^2 + 2(p+1)\right) + k^2 \end{array}.$$

Or $k \in \{2,3,4,6\}$. Donc d'après un calcul précédent, on en déduit qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \{2,3,4,6\}$ vérifiant $k^2 = 5 \cdot q + \ell$. Donc

$$(n+5)^2 = 5 \cdot \left(5 \cdot (p+1)^2 + 2(p+1)\right) + 5 \cdot q + \ell.$$

Donc

$$(n+5)^2 = 5 \cdot \left(5 \cdot (p+1)^2 + 2(p+1) + q\right) + \ell.$$

$(n+5)^2$ est bien un élément de S. La démonstration étant valide pour tout élément de $\mathbb{N}$, on en conclut que S vérifie P_3.

Ainsi, S vérifie bien P_1, P_2, P_3.

2. Soit T un ensemble vérifiant P_1, P_2, P_3.
   (a) Soit $a \in \mathbb{N}^\star$. Supposons que $a \in T$. D'après P_3, $(a+5)^2$ est un élément de T. D'après P_2, on en déduit que $(a+5)$ est un élément de T.
   (b) Soit $a \in \mathbb{N}^\star$. Supposons que $a \in T$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $5n + a \in T$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q(n) : 5n + a \in T$.
   — Initialisation : on a $5 \cdot 0 + a = a \in T$ par hypothèse.
   — Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $Q(n)$ est vérifiée. Montrons que $Q(n+1)$ est vraie. Par hypothèse, $a + 5n \in T$. D'après q.2a, on en déduit que $a + 5n + 5 \in T$. D'où $a + 5(n+1) \in T$.
   $Q(n+1)$ est donc vraie.
   — Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, Q(n)$ est vraie.
   On en déduit la proposition demanée.
   (c) Supposons que 16 est un élément de T. D'après P_3, on en déduit que 4 est un élément de T. D'après q2b, on en déduit que $9 \in T$ et donc d'après P_3, $3 \in T$. De plus, $36 = 5 \cdot 4 + 16$. Donc d'après P_4, on en déduit que $36 \in T$. On en déduit que si $16 \in T$ alors $3, 4, 6$ sont des éléments de T.
   (d) D'après $P_1, 2 \in T$. D'après P_3, on en déduit que $49 \in T$. En utilisant de nouveau P_3, on en déduit que $54^2 \in T$. Or $54^2 = 2916$. Donc $2916 \in T$. Constatons que $65536 = 2916 + 62620 = 2916 + 5 \cdot (2 \cdot 62620)$. D'après P_4, on en déduit que $65536 \in T$.
   (e) Constatons que $65536 = 2^{16}$. Donc d'après P_2, on en déduit que $2^8 \in T$. En utilisant P_2 de nouveau, on en déduit que $2^4 \in T$. Or $16 = 2^4$. Donc $16 \in T$. D'après q2c, $3, 4, 6$ sont donc des éléments de T.
   (f) Soit $n \in S$. Par définition de n, il existe $k \in \{2,3,4,6\}$ et $p \in \mathbb{N}$ vérifiant

   $$n = 5p + k.$$

   Or d'après P_1 et q2e, on sait que $k \in T$. Donc d'après P_4, $5p + k \in T$. On en déduit que $n \in T$.
   On a bien l'inclusion $S \subset T$.

Exercice 3. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit qu'il est symétrique s'il est non vide et :

$$\forall a \in A, -a \in A.$$

1. Indiquer sans justifier pour chacun de ces ensembles s'ils sont symétriques ou non.
   (a) $\mathbb{R}$ (b) $[0,1[$ (c) $[-1,1]$ (d) $[-1,1[$.
2. Montrer que si un ensemble est symétrique alors pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, si $-x \in A$ alors $x \in A$.
3. Soit A un ensemble symétrique. Montrer que si A admet comme borne supérieure M alors il admet comme borne inférieure $-M$. Qu'en est-il de la réciproque ? Justifier.

4. Montrer que si un ensemble symétrique admet comme maximum M alors il admet comme minimum $-M$. Qu'en est-il de la réciproque ? Justifier.
5. Déterminer tous les intervalles qui sont des ensembles symétriques.
6. Déterminer les ensembles symétriques dont la borne inférieure est égale à la borne supérieure.

Correction

1. $\mathbb{R}, [-1, 1]$ sont symétriques. $[0, 1[$ et $[-1, 1[$ ne le sont pas.
2. Soit A un ensemble symétrique et $x \in \mathbb{R}$ tel que $-x \in A$. D'après la définition de symétrique, on en déduit que $-(-x) \in A$. Autrement dit, $x \in A$.
3. Soit M la borne supérieure d'un ensemble symétrique A. Montrons que $-M$ est la borne inférieure de A. Montrons que $-M$ est un minorant de A. Soit $x \in A$. On a $x \leq M$. A étant symétrique, $-x$ est un élément de A donc $-x \leq M$. D'où $x \geq -M$. Par conséquent,
$$\forall x \in A, x \geq -M.$$
$-M$ est donc un minorant de A. Montrons que $-M$ est la borne inférieure de A. Soit m un minorant de A et montrons que $m \leq -M$. Montrons que $-m$ est un majorant de A. Soit $x \in A$. A étant symétrique, $-x \in A$. On a donc : $m \leq -x$. D'où $-m \geq x$. Donc
$$\forall x \in A, -m \geq x.$$
$-m$ est donc un majorant de A. Or M est la borne supérieure de A. Donc $-m \geq M$. D'où $m \leq -M$. Tout minorant de A est donc plus petit que $-M$. On en déduit que $-M$ est la borne inférieure de A. De la même manière, on montre que si $-M$ est la borne inférieure de A alors M est la borne supérieure de A. Le raisonnement mené est similaire au précédent, en inversant les rôles de M et de $-M$, de borne supérieure avec borne inférieure, de majorant avec minorant.
4. Soit A un ensemble symétrique admettant M comme maximum. Donc M est la borne supérieure de A. D'après la question 2, on en déduit que $-M$ est la borne inférieure de A. Or A est symétrique et $M \in A$. Donc $-M$ est un élément de A. Par conséquent, $-M$ est le minimum de A. De même, si A admet $-M$ comme minimum, il admet M comme maximum. Il suffit dans la preuve précédente d'inverser le rôle de M avec $-M$, de majorant avec de minorant, de borne supérieure avec borne inférieure ; de maximum avec minimum.
5. On cherche tous les intervalles symétriques.
   — Cas 1 : A n'a pas de borne supérieure. Montrons alors que $A = \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que A est non vide et n'a pas de borne supérieure. Il existe donc $M \in A$ tel que $|x| \leq M$. Or A et symétrique donc $-M \in A$. On a donc $-M \leq x \leq M$. Mais A est un intervalle, donc $x \in A$. On en déduit dans ce cas que $A = \mathbb{R}$.
   — Cas 2 : A possède une borne supérieure mais ne la contient pas. Notons M celle-ci. Nécessairement, $M > 0$. En effet, on a $M \geq -M$ et si on avait $M = -M$ alors $M = 0$. Dans ce cas, il n'y aurait pas d'élément dans A ce qui est absurde puisque A est non vide. Par symétrie de A, on sait que $-M$ est la borne inférieure de A et comme $M \in A, -M \in A$. Or A est un intervalle. Donc on a $A =]-M, M[$.
   — Cas 3 : A contient sa borne supérieure. Notons M celle-ci. Ici, on a $M \geq 0$, pour les mêmes raisons que précédemment. M est donc le maximum de A. Par symétrie de A, on en déduit que $-M$ est le minimum de A. Comme A est un intervalle, il en résulte que $A = [-M, M]$.

   En résumé, un intervalle symétrique est l'une des formes suivantes,
   (a) $\mathbb{R}$,
   (b) $[-M, M]$, pour M décrivant $\mathbb{R}^+$,
   (c) $]-M, M[$, pour M décrivant $\mathbb{R}^\star$.

   Réciproquement, on constate que chacun des intervalles précédents est symétrique. On a ainsi caractérisé tous les intervalles symétriques.
6. On suppose que borne inférieure et borne supérieure sont égales. On a donc $M = -M$. Donc $M = 0$. Or pour tout $a \in A$, on a $-M \leq a \leq M$.
   D'où pour tout $a \in A, M \leq a \leq M$. Autrement dit, $a = M = 0$. Comme A est non vide, on en déduit que A est réduit à l'ensemble $\{0\}$.

Exercice 4. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. On dit que A est un ensemble ouvert s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que tout entier $n \geq p$ est un élément de A.

1. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Écrire avec une expression logique que A est un ensemble ouvert de $\mathbb{N}$.
2. Soient A, B deux ensembles ouverts de $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que A ∪ B est un ensemble ouvert.

(b) Montrer que A ∩ B est un ensemble ouvert.

3. L'ensemble $P = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$ est-il ouvert ? Le justifier.
4. Soit A un ensemble ouvert de $\mathbb{N}$. On définit le "départ" de A par le plus petit entier p tel que tout entier $n \geq p$ est un élément de A. On veut montrer que le départ de A existe et est bien unique. Pour les questions a, b, c, on fixe A un ensemble ouvert.
   (a) Montrer que si un départ de A existe alors il est unique.
   (b) On pose $N_A = \{p \in A | \forall n \geq p, n \in A\}$. Justifier que N_A est non vide.
   (c) En déduire que N_A admet un plus petit élément m. Montrer que m est le départ de A.
5. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Montrer que A est un ensemble ouvert si et seulement si le complémentaire de A dans $\mathbb{N}$ est fini.
6. Soit A un ensemble ouvert de $\mathbb{N}$. Montrer que si un entier p est le départ de A alors $p-1$ n'est pas un élément de A.
7. Soient A, B deux ensembles ouverts de $\mathbb{N}$. On note respectivement p_1 et p_2 le départ de A et de B.
   (a) Montrer que le départ de A ∩ B est égal à $\max(p_1, p_2)$ (plus grand élément entre p_1 et p_2) .
   (b) Montrer que le départ de A ∪ B est inférieur à $\min(p_1, p_2)$ (plus petit élément entre p_1 et p_2).
   (c) Expliciter un exemple où le départ de A ∪ B est strictement plus petit que $\min(p_1, p_2)$.
8. Déterminer tous les ensembles ouverts de $\mathbb{N}$ ayant comme départ 3. On donnera la liste exhaustive sans justification.

Correction

Soit A une partie de $\mathbb{N}$. On dit que A est un ensemble **ouvert** s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que tout entier $n \geq p$ est un élément de A.

1. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. L'ensemble A est un ensemble ouvert de $\mathbb{N}$ si $\boxed{\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, n \in A}$
2. Soient A, B deux ensembles ouverts de $\mathbb{N}$.
   (a) Par définition de A, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que tout entier $n \geq p$ est un élément de A. Donc tout entier $n \geq p$ est un élément de $A \cup B$. Ainsi, $A \cup B$ est bien ouvert.
   (b) Par définition de A, il existe p_1 tel que tout entier $n \geq p_1$ est un élément de A.
   De même, par définition de B, il existe p_2 tel que tout entier $n \geq p_2$ est un élément de B.
   Notons $p = \max(p_1, p_2)$. Soit $n \geq p$. On a donc $n \geq p_1$ et $n \geq p_2$. Donc n est un élément de A et est un élément de B. Autrement dit, n est un élément de $A \cap B$.
   Par conséquent, $\underline{A \cap B \text{ est bien un ouvert}}$.
3. Montre qu'un ensemble A n'est pas ouvert revient à montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ il existe $n \geq p$ et n n'est pas un élément de A. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a bien $2p+1 > p$. De plus, $2p+1$ étant impair, ce n'est pas un élément de P. L'ensemble P n'est donc pas ouvert.
4. Soit A un ensemble ouvert de $\mathbb{N}$.
   (a) Soient p_1 et p_2 deux départs de A. Par définition de p_2, on sait que tout entier $n \geq p_2$ est un élément de A. Mais p_1 est le plus petit élément qui vérifie cette propriété. Donc $\underline{p_1 \leq p_2}$.
   De même, en échangeant les rôles de p_1 et de p_2 dans le raisonnement précédent, on en déduit que $\underline{p_1 \geq p_2}$.
   Conclusion : $p_1 = p_2$. Autrement dit, il y a unicité du départ de A sous réserve d'existence.
   (b) On pose $N_A = \{p \in A | \forall n \geq p, n \in A\}$. A étant un ouvert, il existe donc un $p \in \mathbb{N}$ tel que tout élément supérieur à p est un élément de A. En particulier, p est un élément de A et p vérifie "$\forall n \geq p, n \in A$. Donc p est un élément de N_A. Cet ensemble est donc non vide.
   (c) L'ensemble N_A est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$. Il admet un donc un plus petit élément que l'on note m. Montrons que m est le départ de A. Par définition, m vérifie comme propriété $\forall n \geq m, n \in A$. Supposons que m n'est pas le départ de A. Il existerait donc $p < m$ entier positif tel que $\forall n \geq p$, $n \in A$. Donc p serait un élément de N_A strictement plus petit que m. Ce qui est absurde, puisque m est le plus petit élément de N_A.
   L'entier m est bien le départ de A.
5. Soit A une partie de $\mathbb{N}$.
   — Supposons que A est un ouvert de $\mathbb{N}$. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que tout élément $n \geq p$ est un élément de A. Par conséquent, tout élément $x \in \mathbb{N}$ qui n'est pas un élément de A est inférieur strict à p. Donc $\overline{A} \subset \{0, 1, \cdots, p\}$. Par conséquent, $\overline{A}$ est bien fini.

— Réciproquement, supposons que $\overline{A}$ est fini. Notons p le maximum de $\overline{A}$. Ainsi, tout élément de $\overline{A}$ est plus petit que p. Soit $n \geq p+1$. n est donc strictement plus grand que p D'où n n'est pas un élément de $\overline{A}$. Autrement dit, n est un élément de A.

Ainsi, tout entier supérieur à $p+1$ est un élément de A.

L'ensemble A est bien un ouvert.

D'après le principe de double implication, on en déduit que A est un ouvert si et seulement si $\overline{A}$ dans $\mathbb{N}$ est fini.

6. Soit A un ensemble ouvert de $\mathbb{N}$. Notons p le départ de A. Montrons par l'absurde que $p-1$ n'est pas un élément de A. Supposons que $p-1$ est un élément de A. Alors $p-1$ est un entier positif et $p-1 < p$. De plus, pour tout entier $n \geq p$, on a $n \geq p-1$. Il en résulte que pour tout entier $n \geq p-1$, on a $n \in A$. Ainsi, p n'est pas le plus petit entier de $\mathbb{N}$ vérifiant $\forall n \geq p, n \in A$.

   Ce qui est absurde, car p est le départ de A.

   Conclusion : $\underline{p-1 \text{ n'est pas un élément de } A}$.

7. Soient A, B deux ensembles ouverts de $\mathbb{N}$. Notons respectivement p_1 et p_2 le départ de A et de B.

   (a) Notons p le départ de $A \cap B$. Soit $n \geq \max(p_1, p_2)$. Donc $n \geq p_1$ et $n \geq p_2$. D'où n est un élément de A et n est un élément de B. Donc n est un élément de $A \cap B$. Il en résulte que $\max(p_1, p_2)$ est plus grand que le départ de $A \cap B$. Autrement dit, $\underline{\max(p_1, p_2) \geq p}$.

   Montrons que $\max(p_1, p_2) - 1$ n'est pas un élément de $A \cap B$.

   — Cas 1 : $\max(p_1, p_2) = p_1$. Dans ce cas, $\max(p_1, p_2) - 1 = p_1 - 1$. Ce n'est pas un élément de A d'après la question 6. Donc $\max(p_1, p_2) - 1 \notin A \cap B$.

   — Cas 2 : $\max(p_1, p_2) = p_2$. Dans ce cas, $\max(p_1, p_2) - 1 = p_2 - 1$. Ce n'est pas un élément de B d'après la question 6. Donc $\max(p_1, p_2) - 1 \notin A \cap B$.

   Par disjonction de cas, on en déduit que le départ de $A \cap B$ doit être strictement plus grand que $\max(p_1, p_2) - 1$. D'où $\underline{p \geq \max(p_1, p_2)}$.

   Des deux inégalités précédentes, on en déduit que $\boxed{\max(p_1, p_2) = p}$.

   (b) Notons q le départ de $A \cup B$. Montrons que $q \leq \min(p_1, p_2)$. Par définition de p_1 et de p_2, pour tout $n \geq p_1$ ou $n \geq p_2$, on a $n \in A \cup B$. Autrement dit, pour tout $n \geq \min(p_1, p_2)$, on a $n \in A \cup B$. Par définition du départ, il en résulte que $\underline{q \leq \min(p_1, p_2)}$.

   (c) Posons $A = \mathbb{N} \backslash \{1\}$ et $B = \mathbb{N}^\star$. Le départ de A est donc 2 et le départ de B est 1. Or $A \cup B = \mathbb{N}$. Donc le départ de $A \cup B$ est 0 qui est bien strictement plus petit que $\min(1, 2) = 1$.

8. Voici tous les ensembles ouvert ayant 3 comme départ :

   (a) $A_1 = \{0, 1\} \cup \{n \in \mathbb{N}, n \geq 3\}$, (b) $A_2 = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N}, n \geq 3\}$,

   (c) $A_3 = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N}, n \geq 3\}$, (d) $A_4 = \{n \in \mathbb{N}, n \geq 3\}$.