

TD 1 mathématiques

BCPST 1 2021-2022

Éléments de logique, théorie naïve des ensembles

Exercice 1. Donner la négation (la réciproque et la contraposée si elles existent) des propositions suivantes :

1. Aucun animal n'est plus grand que la baleine bleue.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n \leq m$.
3. Il existe une suite réelle non majorée.
4. $\exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n \leq m$.
5. L'entier n est pair et est divisible par trois.
6. $P(f, E) : \forall (x, y) \in E^2, (x \neq y) \Rightarrow (f(x) \neq f(y))$.
7. $P(f, a) : \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, (|x - a| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \epsilon)$.

Exercice 2. Soient A, B, C trois variables propositionnelles. Calculer les tables de vérité de :

1. $(A \implies B) \implies C$
2. $A \implies (B \implies C)$
3. $(A \wedge B) \implies C$

Que peut-on en conclure ?

Exercice 3. Lors de l'exploration d'un labyrinthe, vous vous retrouvez à une intersections d'où partent trois chemins : à gauche le chemin de terre, au centre le chemin de pierre, à droite le chemin de fer. Sur chacune de ces routes se trouve une pancarte. Voici ce que l'on peut y lire :

1. pancarte de gauche : cette route vous mène directement au trésor. De plus, si le chemin de fer mène au trésor, il en est alors de même du chemin de pierre.
2. Pancarte du centre : ni le chemin de terre, ni le chemin de fer ne mènent au trésor.
3. Pancarte de droite : suivre le chemin de terre mène au trésor, suivre le chemin de fer mène à la mort.

En sachant que tout message apparaissant dans ce labyrinthe est un mensonge, quel chemin choisir pour revenir tout sourire ?

Exercice 4. Sur une table, sont disposées les cartes

$A \heartsuit$	$Q \heartsuit$	$4 \heartsuit$				
$J \spadesuit$	$8 \spadesuit$	$4 \spadesuit$	$2 \spadesuit$	$7 \spadesuit$	$3 \spadesuit$	
$K \clubsuit$	$Q \clubsuit$	$5 \clubsuit$	$4 \clubsuit$	$6 \clubsuit$		
$A \diamond$	$5 \diamond$					

On cherche à retrouver la carte choisie par X à l'aide d'un dialogue entre A et B . On sait que A connaît uniquement la valeur, et B connaît uniquement la couleur (pour rappel, la couleur désigne le symbole). Ils ont la conversation suivante :

- A : je ne sais pas quelle carte a choisi X .
- B : je savais que tu ne le savais pas, mais moi non plus je ne sais pas.
- A : maintenant je sais.
- B : moi aussi.

Retrouver la carte choisie par X . On détaillera le raisonnement pour retrouver la carte.

Exercice 5. On pose $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, b\}$. Décrire les ensembles suivants :

1. $A \times B$,
2. $A \cap B$,
3. $A \cup B$.

Exercice 6. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ? Le justifier

1. $\exists A \subset \mathbb{N}, -1 \in A$,
2. $\forall A \subset \mathbb{N}, 0 \in A$,
3. $\forall A \subset \mathbb{N}, \exists m \in A, \forall k \in A, m \leq k$,
4. $\exists m \in \mathbb{N}, \forall A \subset \mathbb{N}, \forall k \in A, m \leq k$,
5. $\forall A \subset \mathbb{N}, \exists m \in A, \forall k \in A, m \geq k$,
6. $\exists A \subset \mathbb{N}, \exists m \in A, \forall k \in A, m \geq k$,