

TD 4 mathématiques

BCPST 1 2021-2022

Nombres complexes

Points abordés

— Nombres complexes.

Exercice 1. Déterminer les formes algébriques et exponentielles (dans l'ordre de votre choix) de

1. $(1+i)^{20}$, 2. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{125}$, 3. $e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}$, 4. $e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Exercice 2. Résoudre les équations d'inconnue complexe z suivantes :

1. $|z| = |z - 1 + i|$ 2. $|\bar{z} - i| = 1$ 3. $z(2\bar{z} + i) = 1$

On pourra également donner une interprétation géométrique de l'ensemble des solutions.

Exercice 3. On veut résoudre l'équation d'inconnue complexe z suivante :

$$z^2 - (2+i)z + (i-1) = 0 \tag{E}$$

Dans la suite, a et b désignent respectivement la partie réelle et imaginaire de z .

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente au système
$$\begin{cases} a^2 - b^2 - 2a + b - 1 = 0 \\ 2ab - a - 2b + 1 = 0 \end{cases}.$$
2. Factoriser $2ab - a - 2b + 1$. En déduire les solutions de (E).

Exercice 4. Soient u et v deux complexes. Montrer que :

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2).$$

Exercice 5. On note $E = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) > 0\}$, et $F = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$.

Montrer que :

$$z \in E \Leftrightarrow \frac{z-i}{z+i} \in F.$$