TD 6

Exo 3 : Énoncé correct :

On note $A = \{(u_n) \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n\}$.

Trouver toutes les suites bornées de A.

Esquisse de preuve :

$r^2 - 2r - 3 = 0$

$-1 , 3$

Soit (u_n) une suite de A.

Il existe λ, μ des réels tq :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda . (-1)^n + \mu . 3^n .$$

On a,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -|\lambda| + \mu . 3^n \leq u_n \leq |\lambda| + \mu . 3^n .$$

(u_n) bornée $\Leftrightarrow \mu = 0$.

Les suites bornées de A sont donc exactement les suites de la forme $(\lambda (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ où λ est un réel.

Exo 5 :

Pour tout $n \geq 1$, on pose : $P(n)$: " $u_n \in [-1, 0]$ ".

I :

$$u_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \in [-1, 0].$$

Donc : $P(1)$ est vraie.

H : soit $n \geq 1$. Supposons que $P(n)$ est vraie.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie.

D'après $P(n)$:

$$-1 \leq u_n \leq 0$$

Donc : $1 \geq -u_n \geq 0$.

Par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que :

$$1^2 \geq (-u_n)^2 \geq 0^2.$$

Donc :

$$1 \geq u_n^2 \geq 0$$

Donc :

$$0 \geq u_n^2 - 1 \geq -1.$$

On en déduit que $-1 \leq u_{n+1} \leq 0$

Autrement dit, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : d'après le principe de récurrence :

$\forall n \geq 1$, $P(n)$ vraie.

Exo 6 : 1- Il est possible de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Donc la suite (v_n) est bien définie. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = \frac{1}{2} v_{n+1} + \frac{1}{2} v_n.$$

$$v_0 = 0$$

$$v_1 = \ln(2)$$

(v_n) est donc une suite récurrente linéaire d'ordre d'équation caractéristique :

$\frac{1}{4} + \frac{4}{2} =$

$$r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0.$$

Cette équation a pour discriminant $\Delta = \frac{1}{4} + \frac{4}{2} = \frac{9}{4}$.

Elle a donc comme solutions réelles :

$$q_1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad q_2 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Il existe donc A, B des réels vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = A + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Déterminons A et B. On a :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-\frac{1}{2}B=\ln(2) \end{cases} \iff \begin{cases} B=-A \\ A+\frac{1}{2}A=\ln(2) \end{cases} \iff \begin{cases} B=-A \\ A=\frac{2}{3}\ln(2) \end{cases}$$

Donc : $\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n=\frac{2}{3}\ln(2)-\frac{2}{3}\ln(2).(-\frac{1}{2})^n$

2) On a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=e^{v_n}$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=2^{\frac{2}{3}\ln(2)-\frac{2}{3}\ln(2).(-\frac{1}{2})^n}$.

Exo 7 :

1) On suppose que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.

Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Par hypothèses, il existe M_1 et M_2 des réels vérifiant :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_{2n}|\leq M_1 \text{ et } |u_{2n+1}|\leq M_2.$$

Posons $M=\max(M_1,M_2)$.

Montrons que : $\forall n\in\mathbb{N}, |u_n|\leq M$. Par disjonction de cas.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

cas 1 : n pair. Il existe $p\in\mathbb{N}$, $n=2p$.

On a : $|u_n|=|u_{2p}|\leq M_1\leq M$.

cas 2 : n impair. Il existe $p\in\mathbb{N}$, $n=2p+1$

On a : $|u_n|=|u_{2p+1}|\leq M_2\leq M$.

Par disjonction de cas, $|u_n|\leq M$.

Donc : (u_n) est bien bornée.

2) Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_0 \leq u_n \leq u_1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Cas 1 : $n = 2p$ (n pair)

On a $$u_0 \underset{\nearrow (u_{2n})}{\leq} u_{2p} \underset{\text{hypothèse}}{\leq} u_{2p+1} \underset{\searrow (u_{2n+1})}{\leq} u_1.$$

cas 2 : $n = 2p+1$ (n impair)

$$u_0 \leq u_{2p} \leq u_{2p+1} \leq u_1.$$

On en déduit que (u_n) est bornée.

3. a) (u_n) bornée. Il existe $M_1 > 0$ tel que :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M_1$

(v_n) bornée. Il existe $M_2 > 0$ tel que :

$\forall n \in \mathbb{N}, \ |v_n| \leq M_2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|u_n v_n| \leq M_1 . M_2.$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n v_n| \leq M_1 M_2$.

$(u_n v_n)$ est bien bornée.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n| \leq M_1 + M_2.$$

Donc $(u_n + v_n)$ est bornée.