TD 7 Applications

BCPST 1 2021-2022

V.Vong

Exercice 1. Parmi ces fonctions lesquelles sont surjectives, injectives, bijectives ? Le justifier. $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$ $\quad f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - x - 1 \end{array}$ $\quad f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2+x+1}{x^2+1} \end{array}$

Exercice 2. On considère les applications suivantes :

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 2. $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{N}$ 3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Parmi tous les triplets $(f_1, f_2, f_3) \in \{f, g, h\}^3$ préciser pour lesquels $f_1 \circ f_2 \circ f_3$ est bien définie.

Exercice 3. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On suppose que f et g sont injectives. Montrer que $g \circ f$ est injective.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+\star}$ une application vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)f(y).$$

1. Montrer que $f(0) = 1$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}, (f(x) = 1) \implies (x = 0)$.

Exercice 5. Décrire l'image et l'image réciproque de $[0, +\infty[$ par l'application f définie par

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |2x - 3| - |x + 3|, \end{array}$$

on exprimera les résultats à l'aide d'intervalles.

Exercice 6. Déterminer l'application réciproque des fonctions définies par

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. 2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f_2(x, y) = (5x + 2y, 4x - y)$

Exercice 7. On définit l'application $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star \to \mathbb{Q}$ par :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star, \phi((p, q)) = \frac{p}{q}.$$

1. Montrer que ϕ est surjective.
2. Déterminer l'ensemble $S = \phi^-(\{1\})$.