

TD 8 Fonctions usuelles

BCPST 1 2021-2022

V.Vong

Exercice 1. Étudier les fonctions (domaine de définition, de continuité, de dérivabilité, tableau de variation, limite aux bords, courbe représentative) définies par :

1. $x \mapsto \frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $x \mapsto x + \cos(x)$.
3. $x \mapsto |2x - 1| - |x + 2| + 3x$.
4. $x \mapsto x + \sqrt{|x^2 - 1|}$.
5. $x \mapsto |\tan x| + \cos x$.
6. $x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ (à étudier sur $]0, +\infty[$).

Exercice 2. pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = e^{2x} + e^x - 1$ et $g(x) = 3x + 1$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
2. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} vers $] - 1, +\infty[$.
3. Déterminer la réciproque de f .
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq g(x)$.
5. Tracer les graphes de f et g sur un même repère.

Exercice 3. 1. Étudier brièvement la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ et tracer son graphe.

2. Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls et distincts vérifiant $a^b = b^a$.

Exercice 4. On veut montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2},$$

par des approches différentes.

1. En étudiant la fonction $x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ montrer l'égalité énoncée.
2. Qu'en est-il pour $x < 0$?
3. On fixe $x > 0$. En raisonnant par équivalence, montrer l'égalité revient à prouver que $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est vraie. En exploitant le fait que \arctan est bijective de \mathbb{R} vers $] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ démontrer l'égalité énoncée.

Exercice 5. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.