DM 4 Mathématiques

Problème 1

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^3+x^2-x+2}$. Le but est de déterminer toutes les primitives de f.

1. Étudier le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f et justifier que f est continue sur l'intervalle $I =]-2,+\infty[$.
2. (a) Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$\forall x \in I, \quad f(x) = \underbrace{\frac{a}{x+2}}_{A(x)} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$
   (b) Donner toutes les primitives de A sur I.
3. (a) Montrer qu'il existe $(d,e) \in \mathbb{R}^2$ tels que
$$\forall x \in I, \quad \frac{bx+c}{x^2-x+1} = \underbrace{d\frac{2x-1}{x^2-x+1}}_{B(x)} + \underbrace{\frac{e}{x^2-x+1}}_{C(x)}$$
   (b) Donner toutes les primitives de B sur I.
4. On cherche maintenant les primitives de C. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x C(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in I$.
   (a) Calculer F avec le changement de variable $u = \dfrac{2t-1}{\sqrt{3}}$.
   (b) En déduire toutes les primitives de C sur I.
5. Conclure en donnant toutes les primitives de F sur I.

Problème 2

On fixe $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.
2. Démontrer par récurrence : $\forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{1+t^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.
3. En déduire l'expression $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
4. Avec le changement de variable $t = ux$, montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x^{2n+3}\int_0^1 \frac{u^{2n+2}}{1+x^2u^2}\,\mathrm{d}u$.
5. Justifier l'inégalité $\forall u \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{u^{2n+2}}{1+x^2u^2} \leqslant u^{2n+2}$ et en déduire
$$\left|\arctan(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$
6. Justifier que si $-1 \leqslant x \leqslant 1$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctan(x)$.
7. En déduire une fonction Python `arctan(x, epsilon)` qui prend en argument un nombre réel x, supposé dans $[-1,1]$, et qui renvoie une approximation de $\arctan(x)$ avec un écart garanti strictement inférieur à `epsilon`.