# DM 6 Mathématiques

## Problème 1

Le but est de démontrer le théorème des bornes. On se donne une fonction $f$ continue sur un intervalle fermé borné non-vide $[a, b]$.

**1** Dans un premier temps, on souhaite montrer que $f$ est majorée. On raisonne par l'absure en supposant que $f$ n'est pas majorée sur $[a, b]$.

**1.a** Écrire avec des quantificateurs l'assertion « $f$ est majorée sur $[a, b]$ » et sa négation.

**1.b** Justifier qu'alors $f$ n'est pas majorée sur $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ ou $f$ n'est pas majorée sur $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$.

**1.c** Construire deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adjacentes telles que $a_0 = a$, $b_0 = b$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$, et telles que $f$ ne soit pas majorée sur $[a_n, b_n]$.

**1.d** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $c_n \in [a_n, b_n]$ tel que $f(c_n) \geqslant n$.

**1.e** Justifier que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $c \in [a, b]$, puis en déduire une contradiction.

**2** On souhaite maintenant montrer que la borne est atteinte. On raisonne encore une fois par l'absurde, on pose $M = \underset{x\in[a,b]}{\operatorname{Sup}} f(x)$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{M - f(x)}$.

**2.a** Justifier qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $g(x) \leqslant A$.

**2.b** En déduire une contradiction.

**3** Montrer de même que $f$ admet un minimum sur $[a, b]$ et qui est atteint.

## Problème 2

On étudie la croissance et la floraison de $n \in \mathbb{N}^*$ bulbes de plantes placées dans des conditions identiques. Pendant une première phase de *croissance* de six semaines, on mesure la hauteur des plantes et on garde uniquement celles qui ont atteint le seuil de vingt centimètres. Puis pendant une semaine supplémentaire on observe la *floraison* des plantes. On s'intéresse aux plantes qui ont à la fois atteint le seuil de vingt centimètres et qui ont présenté une floraison. On suppose que la probabilité d'atteindre le seuil de hauteur est $p \in ]0, 1[$ et que la probabilité de présenter une floraison est $q \in ]0, 1[$. On suppose que toutes les plantes ont un comportement indépendant, et que la probabilité de présenter une floraison est indépendante de la croissance.

On note alors $X$ la variable aléatoire qui donne le nombre de plantes ayant atteint le seuil de hauteur, et $Y$ le nombre de celles qui ont été sélectionnées et présenté une floraison.

**1** Quelle est la loi de $X$ ?

**2** Avec un arbre de probabilités, donner la loi de $Y$ lorsque $n = 1$.

**3** On suppose $n = 2$. En énumérant l'univers, donner la loi de $Y$ sous forme de tableau.

**4** Justifier que les évènements $(X = k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ forment un système complet d'évènements, puis en déduire :

$$\forall \ell \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(Y = \ell) = \sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell} q^\ell (1-q)^{k-\ell} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

**5** Démontrer : $\forall \ell \in [\![0, n]\!]$, $\forall k \in [\![\ell, n]\!]$, $\displaystyle\binom{k}{\ell}\binom{n}{k} = \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{n-k}$

**6** En déduire que $Y$ suit une loi binomiale, et donner ses paramètres.

## Problème 3

On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on pose la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} x^{2n} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**1** Pour $n = 0$, justifier que $f$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

**2** On suppose $n = 1$.

**2.a** Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**2.b** Montrer que $f$ est dérivable en 0.

**2.c** Montrer que $f'$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

**3** On suppose maintenant $n = 2$. Justifier que $f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $f'(0) = 0$, que $f'$ est dérivable en 0, mais que $f$ n'est pas $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

**4** Enfin on travaille avec $n \geqslant 0$ quelconque.

**4.a** Démontrer par récurrence sur l'entier $k \in \mathbb{N}$ : il existe des polynômes $P_k$ et $Q_k$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f^{(k)}(x) = x^{2(n-k)}\left(P_k(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right) + Q_k(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

et donner la relation de récurrence vérifiée par $P_k$ et $Q_k$.

**4.b** **i** En déduire que pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $f^{(k)}(0) = 0$ et $f$ est $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

**ii** Justifier que $f^{(n)}(0) = 0$.

**4.c** Donner une relation de récurrence vérifiée par $(P_k(0), Q_k(0))$ et justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, exactement l'un des deux est non-nul.

**4.d** En déduire que $f^{(n)}$ n'est pas continue en 0.