

DS 3 Mathématiques

Exercice

Calculer les sommes et produits suivants ($n \in \mathbb{N}^*$).

- $A_n = \sum_{k=0}^{2n} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor^2$ (séparer les termes d'indice pair et impair)
- $B_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 3^{j-i}$
- $C_n = \prod_{k=0}^{n-1} \exp(3^{k-1} 5^{-2k})$

Problème 1

Problème 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de l'exercice est de calculer $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$.

1. **(Informatique)** Écrire une fonction Python `somme(n)` qui prend en argument un nombre entier $n \geq 1$ et qui renvoie la valeur de S_n .
2. On note α l'unique solution de l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ de partie imaginaire positive.
 - (a) Écrire α sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
 - (b) Vérifier que $\alpha^3 = 1$.
 - (c) Écrire les nombres α^2 , $-\alpha$ et $-\alpha^2$ sous forme algébrique.
 - (d) Démontrer :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^2 + z + 1 = (z - \alpha)(z - \alpha^2) \quad \text{et} \quad z^2 - z + 1 = (z + \alpha)(z + \alpha^2) \quad (1)$$

3. En déduire :

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(k + \alpha)(k - \alpha - 1)} - \frac{1}{(k - \alpha)(k + \alpha + 1)} \right)$$

4. En déduire la valeur de S_n en fonction de n (le résultat est un nombre réel).

Problème 3

Soit le nombre complexe $z = \frac{2+i}{2-i}$. Le but est de montrer que $|z| = 1$ mais qu'il n'existe pas d'entier $n \geq 1$ tel que $z^n = 1$.

1. **(Informatique)** On représente les nombres complexes en Python par des listes de longueur 2, formées par leur partie réelles et leur partie imaginaire : le nombre $z = a + bi \in \mathbb{C}$ (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) est représenté par la liste $\mathbf{z} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

- (a) Écrire une fonction `produit(z, w)` qui prend en argument deux tels nombres complexes, et renvoie une liste représentant le nombre complexe $z \times w$.
- (b) Écrire de même une fonction `quotient(z, w)` (on suppose que $\mathbf{w}$ représente un nombre complexe non-nul) qui renvoie une liste représentant le nombre complexe $\frac{z}{w}$.
- (c) Écrire une fonction `puissance(z, n)` qui prend en argument un tel nombre complexe et un entier $n \in \mathbb{N}$ et qui renvoie la liste qui représente le nombre complexe z^n .

- (d) On souhaite écrire une fonction `test(N)` qui prend en argument un nombre entier $N \geq 1$, et qui cherche le plus petit entier n tel que $z^n = 1$, en se limitant à tester parmi les n tels que $1 \leq n \leq N$, et qui renvoie `None` si un tel entier n'existe pas. Un élève fort peu rigoureux écrit la fonction ci-contre.

Êtes-vous satisfait-e ? Recopier la fonction, en corrigeant les éventuelles erreurs et en expliquant bien ce qu'il faut modifier et pourquoi.

```
# fonction de test
def test(N):
    # introduire z
    z = quotient(2+i, 2-i)
    # tester pour n entre 1 et N
    for n in range(1, N):
        # condition z puissance n égal 1
        if puissance(z, n) == 1:
            # c'est bon, on a trouvé n
            return n
        else:
            # sinon, ça ne marche pas
            return None
```

2. Vérifier que $|z| = 1$.
3. On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2i} \left((2+i)^n - (2-i)^n \right)$. Justifier que $z^n = 1$ si et seulement si $u_n = 0$.
4. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 .
5. (a) Trouver une relation récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiée par la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 (b) En déduire que le nombre u_n est entier, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 (c) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, il existe un nombre entier $p_n \in \mathbb{Z}$ tel que $u_n = 5p_n - (-1)^n$.
6. Conclure.
7. (a) Écrire z sous forme algébrique, et sous forme exponentielle.
 (b) Démontrer à partir des résultats précédents qu'il n'existe pas d'entiers $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\arccos(\frac{3}{5}) = \frac{p\pi}{q}$ (« la valeur $\frac{3}{5}$ n'est pas le cosinus d'un angle qui est une fraction de π »).

Problème 4