DS 4 Mathématiques
Correction

Exercice 1

- f Définie si et seulement si $x > 0$ (pour $\ln(x)$) puis $\ln(x) \in \mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Autrement dit, une fois supposé $x > 0$, alors f n'est pas définie si et seulement si
$$\exists k \in \mathbb{Z},\ \ln(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi \tag{1}$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \exp\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \tag{2}$$
Conclusion :
$$\boxed{\mathcal{D}_f = \left]0, +\infty\right[\setminus \left\{e^{\pi/2+k\pi} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}} \tag{3}$$
- g Définie si et seulement si $x \geqslant 0$ (pour $\sqrt{x}$) puis $-1 \leqslant 3\sqrt{x} - 2 \leqslant 1$ (pour calculer arccos). Cette dernière inégalité est équivalente à
$$-1 \leqslant 3\sqrt{x} - 2 \leqslant 1 \tag{4}$$
$$\iff 1 \leqslant 3\sqrt{x} \leqslant 3 \tag{5}$$
$$\iff \frac{1}{3} \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1 \tag{6}$$
$$\iff \frac{1}{9} \leqslant x \leqslant 1 \tag{7}$$
(car on a déjà supposé $x \geqslant 0$). Donc en résumé :
$$\boxed{\mathcal{D}_g = \left[\frac{1}{9}, 1\right]} \tag{8}$$
- h Définie si et seulement si $\lfloor 2x + 3 \rfloor \neq 0$. Or la condition contraire est
$$\lfloor 2x + 3 \rfloor = 0 \tag{9}$$
$$\iff 0 \leqslant 2x + 3 < 1 \tag{10}$$
$$\iff -3 \leqslant 2x < -2 \tag{11}$$
$$\iff -\frac{3}{2} \leqslant x < -1 \tag{12}$$
En résumé h est définie en dehors de l'intervalle $[-\frac{3}{2}, -1[$, donc
$$\boxed{\mathcal{D}_h = \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right[\cup \left[-1, +\infty\right[} \tag{13}$$
- i La fonction arctangente est définie sur $\mathbb{R}$; elle prend éventuellement des valeurs négatives, mais la fonction racine cubique est aussi définie sur $\mathbb{R}$, donc il n'y a pas de problèmes. Conclusion :
$$\boxed{\mathcal{D}_i = \mathbb{R}} \tag{14}$$

Problème 1

1. Posons $f : x \mapsto e^{x^2}$. Alors pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$$f(x+y) \times f(x-y) = e^{(x+y)^2} \times e^{(x-y)^2} \tag{15}$$
$$= e^{x^2+2xy+y^2} \times e^{x^2-2xy+y^2} \tag{16}$$
$$= e^{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2} \tag{17}$$
$$= e^{2x^2+2y^2} \tag{18}$$
$$= \left(e^x\right)^2 \times \left(e^y\right)^2 \tag{19}$$
$$= \boxed{f^2(x)f^2(y) = f(x+y)f(x-y)} \tag{20}$$

Donc $\boxed{\text{cette fonction vérifie } (*)}$.

Il est important de comprendre que dans la suite, on suppose qu'on a une fonction quelconque qui vérifie $(*)$; on peut alors appliquer la propriété $(*)$ avec diverses valeurs pour x et pour y et en déduire de plus en plus de propriétés de f, jusqu'à pouvoir caractériser entièrement f.

2. Appliquons $(*)$ avec $x \leftarrow 0$ et $y \leftarrow 0$:
$$(f(0))^2 = (f(0))^4 \tag{21}$$
Quitte à poser $X = f(0)$ cette équation revient à $X^2(X^2-1) = 0$ et admet pour solutions exactement $X = 0$, $X = 1$ et $X = -1$.
Conclusion : $\boxed{f(0) \in \{-1, 0, 1\}}$.

3. Appliquons $(*)$ avec un $x \in \mathbb{R}$ quelconque et $y \leftarrow 0$:
$$(f(x))^2 = (f(x))^2 \times (f(0))^2 \tag{22}$$
On voit alors que si $f(0) = 0$, alors $(f(x))^2 = 0$ donc $\boxed{f(x) = 0}$. Le cas $f(0) = 1$ ou $f(0) = -1$ ne donne rien de nouveau.
Appliquons aussi $(*)$, pour un $x \in \mathbb{R}$ quelconque, avec $x \leftarrow \frac{x}{2}$ et $y \leftarrow \frac{x}{2}$:
$$f(x) \times f(0) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^4 \tag{23}$$
Cette puissance quatrième est positive ! On lit alors directement : si $f(0) = 1$ alors $\boxed{f(x) \geqslant 0}$ et si $f(0) = -1$ alors $\boxed{f(x) \leqslant 0}$.

4. (a) Appliquons encore $(*)$ avec $x \leftarrow \frac{x}{2}$ et $y \leftarrow \frac{x}{2}$:
$$f(x) \times f(0) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^4 \tag{24}$$
Sachant $f(x) = 0$ on déduit donc $(f(x/2))^4 = 0$ puis $\boxed{f(x/2) = 0}$.

   (b) On démontre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x/2^n) = 0$.
   - $n = 0$: c'est l'hypothèse $f(x) = 0$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $f(x/2^n) = 0$. Appliquons le raisonnement précédent : utilisons $(*)$ avec $x \leftarrow 1/2^{n+1}$ et $y \leftarrow 1/2^{n+1}$:
   $$f\left(\frac{x}{2^n}\right) \times f(0) = \left(f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)^4 \tag{25}$$
   Sachant par hypothèse $f(x/2^n) = 0$ on déduit $f(x/2^{n+1}) = 0$.

   Par récurrence on a donc démontré $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ f(x/2^n) = 0}$.
   On utilise maintenant les limites de suites : on sait
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0 \tag{26}$$
   et f est $\boxed{\text{continue en } 0}$ donc
   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0) = 0} \tag{27}$$

5. Par $\boxed{\text{contraposée}}$ on a démontré : si $f(0) \neq 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$. Donc, dans les cas $f(0) = 1$ ou $f(0) = -1$, les inégalités de la question précédentes sont strictes.
C'est aussi une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires : si f prend à la fois des valeurs positives, et des valeurs négatives, alors f s'annule, et par la question précédente doit être constante et nulle ; par contraposée, si f ne s'annule jamais alors f doit rester strictement positive ou bien strictement négative, le signe est alors celui de $f(0)$.

À partir de maintenant on sait que g est une fonction continue, avec $g(0) = 0$, $g(1) = \lambda$ (les conditions ne permettront pas de déterminer la valeur de λ) et g vérifie $(**)$.

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Appliquons $(**)$ avec $x \leftarrow 0$ et $y \leftarrow x$:

$$g(x) + g(-x) = 2g(x) + 2g(0) \tag{28}$$

qui donne alors immédiatement $\boxed{g(-x) = g(x)}$ donc $\boxed{g \text{ est paire}}$.

7. Appliquons $(**)$ avec $x \leftarrow 1$ et $y \leftarrow 1$:

$$g(2) + g(0) = 2g(1) + 2g(1) \tag{29}$$

d'où directement $\boxed{g(2) = 4\lambda}$.

Appliquons alors $(**)$ avec $x \leftarrow 2$ et $y \leftarrow 1$:

$$g(3) + g(1) = 2g(2) + 2g(1) \tag{30}$$

soit $g(3) + \lambda = 8\lambda + 2\lambda$ et alors $\boxed{g(3) = 9\lambda}$.

8. (a) *C'est maintenant que les choses sérieuses commencent, il est nécessaire d'avoir bien compris la question précédente et les idées générales. Avec $x = 1$, il s'agirait de poursuivre le raisonnement de la question précédente par récurrence ; mais on a besoin en fait d'un x quelconque pour pouvoir après passer aux rationnels (« diviser »).*

Il s'agit en fait d'une récurrence double, qu'il est plus naturel de rédiger en montrant « $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$ impliquent $\mathcal{P}(n+1)$ » : on va appliquer $(**)$ avec $x \leftarrow n$ et $y \leftarrow 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Démontrons par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $g(nx) = n^2 g(x)$ »

- $n = 0$: c'est $g(0) = 0$.
- $n = 1$: c'est $g(x) = g(x)$.
- Soit $n \geqslant 1$, supposons $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$, montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Appliquons $(**)$ avec $x \leftarrow nx$ et $y \leftarrow x$:

$$g((n+1)x) + g((n-1)x) = 2g(nx) + 2g(x) \tag{31}$$

par l'hypothèse de récurrence, cela donne :

$$g((n+1)x) + (n-1)^2 g(x) = 2n^2 g(x) + 2g(x) \tag{32}$$

Calcul :

$$g((n+1)x) = \left(2n^2 + 2 - (n-1)^2\right) g(x) = (n^2 + 2n + 1) g(x) = \boxed{(n+1)^2 g(x) = g((n+1)x)} \tag{33}$$

Ceci démontre $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ g(nx) = n^2 g(x)}$, et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) C'est une conséquence de la $\boxed{\text{parité}}$: pour $n \geqslant 0$,

$$g((-n)x) = g(nx) = n^2 g(x) = (-n)^2 g(x) \tag{34}$$

donc la propriété est aussi vraie pour $-n$, donc $\boxed{\text{vraie } \forall n \in \mathbb{Z}}$.

9. Sous ces hypothèses alors $g(q \times r) = g(p) = \lambda p^2$ d'une part par la question précédente (avec $n \leftarrow p$, $x \leftarrow 1$). D'autre part $g(q \times r) = q^2 \times g(r)$, encore par la question précédente (cette fois avec $n \leftarrow q$ et $x \leftarrow r$). En comparant les deux on trouve bien

$$g(r) = \frac{\lambda p^2}{q^2} = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \lambda = \boxed{r^2 \lambda = g(r)} \tag{35}$$

10. *Méthode vue : il s'agit de montrer que si une égalité entre fonctions continues est vraie pour les rationnels alors elle est vraie pour tous les réels.*

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La définition de la partie entière de nx donne :

$$\lfloor nx \rfloor \leqslant nx < \lfloor nx \rfloor + 1 \tag{36}$$

donc en divisant par n :

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x < \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \frac{1}{n} \tag{37}$$

À gauche on obtient directement $r_n \leqslant x$, et avec celle de droite $x < r_n + \frac{1}{n}$ donc $x - \frac{1}{n} < r_n$. Conclusion :

$$\boxed{x - \frac{1}{n} < r_n \leqslant x} \tag{38}$$

(b) C'est le $\boxed{\text{théorème des gendarmes}}$: de chaque côté

$$\lim_{n \to +\infty} \left(x - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \to +\infty} x = x \tag{39}$$

et l'inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc on conclut

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} r_n = x} \tag{40}$$

(c) Utilisant la $\boxed{\text{continuité de } g \text{ en } x}$ (c'est la composée de f, qui est continue et strictement positive, et de ln qui est continue sur $]0, +\infty[$) on déduit

$$\lim_{n \to +\infty} g(r_n) = f(x) \tag{41}$$

D'autre part la fonction $x \mapsto \lambda x^2$ est aussi continue (par les opérations usuelles), et donc

$$\lim_{n \to +\infty} \lambda r_n^2 = \lambda x^2 \tag{42}$$

Comme $g(r_n) = \lambda r_n^2$ alors on en déduit $\boxed{g(x) = \lambda x^2}$, ceci valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

11. Résumons proprement :
   - On a montré que si g vérifiait $(**)$, avec $g(0) = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \lambda x^2$, où $\lambda = g(1)$. On n'arrive pas à déterminer mieux λ ni à trouver d'autres contraintes dessus.
   - Réciproquement, quelque soit $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \lambda x^2$ vérifie $(**)$ (simple calcul) : il n'y a effectivement pas d'autres contraintes.

   Conclusion : l'ensemble des fonctions qui vérifie $(**)$ est exactement

$$(**) \qquad \boxed{\left\{ x \mapsto \lambda x^2 \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}} \tag{43}$$

   Pour $(*)$ maintenant. Sous l'hypothèse $f(0) = 1$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$. Dans ce cas $\ln \circ f$ vérifie $(**)$, et réciproquement si g vérifie $(**)$ alors $\exp \circ g$ vérifie $(*)$ (simple calcul de logarithme et exponentielle). On trouve donc exactement toutes les fonctions $x \mapsto e^{\lambda x^2}$, dans ce cas, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Cela a nécessité d'exclure le cas $f(0) = 0$: f est la fonction nulle, qui vérifie bien $(*)$.

   Dans le cas $f(0) = -1$, alors c'est en fait $-f$ qui vérifie aussi $(*)$ (on pose $g : x \mapsto \ln(-f(x))$). On trouve donc $f : x \mapsto -e^{\lambda x^2}$.

   Conclusion : l'ensemble des fonctions qui vérifie $(*)$ est exactement

$$(*) \qquad \boxed{\left\{ x \mapsto 0,\; x \mapsto e^{\lambda x^2},\; x \mapsto -e^{\lambda x^2} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}} \tag{44}$$

Exercice d'informatique

1. On teste la condition contraire et on s'arrête en renvoyant `False` si elle est vérifiée. Sinon, c'est qu'on arrive au bout et que tout les nombres sont bien entre 0 et 9, on peut alors renvoyer `True` à la fin et en dehors de la boucle. La condition contraire de `0 <= L[i] and L[i] <= 9` est `L[i] < 0 or L[i] > 9` (loi de Morgan !).

```
def est_valide(L):
    for i in range(len(L)):
        if L[i] < 0 or L[i] > 9:
            return False
    return True
```

2. Comme indiqué, il s'agit de calculer une somme, la somme des `L[i] * 10**i`.

```
def valeur(L):
    N = 0
    for i in range(len(L)):
        N = N + L[i] * 10**i
    return N
```

3. La condition à chercher est `L[i] == 7 and L[i+1] == 7` : on s'arrête en renvoyant `True` dès qu'on l'a trouvée, et sinon, on peut renvoyer `False` à la fin en dehors de la boucle. À cause de ce test sur deux chiffres consécutifs, le `range` doit aller un cran moins loin que la fin de la liste.

```
def doublesept(L):
    for i in range(len(L)-1):
        if L[i] == 7 and L[i+1] == 7:
            return True
    return False
```

4. Plusieurs possibilités pour l'écrire. On peut faire une boucle `while`, qui avance tant qu'elle lit des zéros en début de boucle. Attention alors à tester aussi la condition `k < n` avant d'écrire `L[k]` :

```
def divisible(L):
    n = len(L)
    k = 0
    while k < n and L[k] == 0:
        k = k + 1
    return k
```

Ou bien une boucle `for` qui s'arrête dès qu'elle lit un chiffre différent de zéro. Attention alors à la liste entièrement nulle, qui ne produirait pas de `return` : on est obligé de mettre un `return` à la fin quand même.

```
def divisible(L):
    n = len(L)
    for k in range(n):
        if L[k] != 0:
            return k
    return n
```

5. Il s'agit de créer une nouvelle liste qui ajoute un zéro en premier terme, et qui décale tous les autres d'un cran vers la droite (par exemple passer de `[5, 2, 0, 2]` qui représente 2025 à `[0, 5, 2, 0, 2]` qui représente 20250) : c'est la liste `M` telle que `M[i] = L[i-1]`. Elle est bien sûr de longueur un de plus que `L`. Une proposition :

```
def foixdix(L):
    n = len(L)
    M = [0] * (n+1)
    M[0] = 0 # inutile, mais pour insister
    for i in range(1, n+1):
        M[i] = L[i-1]
    return N
```

En fait, il y a aussi beaucoup plus simple : avec les opérations sur les listes, c'est tout simplement `M = [0] + L`.

Exercice 2

1. *On rédige cet exercice en ré-écrivant bien ce qu'il s'agit de démontrer ; mais après coup, ou si on a la bonne intuition, on peut aller beaucoup plus vite et donner directement les contre-exemples.*
   - φ_1
     - Injectivité : soient deux nombres x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lfloor x_1 \rfloor = \lfloor x_2 \rfloor$, a-t-on $x_1 = x_2$? Évidemment que non : cette condition signifie exactement que x_1 et x_2 sont dans un même intervalle $[n, n+1[$ ($n \in \mathbb{Z}$). Par exemple $x_1 = 3{,}1$ et $x_2 = 3{,}2$ vérifient $\lfloor x_1 \rfloor = \lfloor x_2 \rfloor = 3$ mais $x_1 \neq x_2$. Donc $\boxed{\varphi_1 \text{ n'est pas injective}}$.
     - Surjectivité : soit $y \in \mathbb{R}$, existe-t-il $x \in \mathbb{R}$ tel que $\lfloor x \rfloor = y$? Mais la partie entière ne prend, comme son nom l'indique, que des valeurs entières. Ainsi y n'a pas d'antécédents si $y \notin \mathbb{Z}$, par exemple $y = 3{,}5$ (sinon, il a pour antécédents tout l'intervalle $[y, y+1[$). Donc $\boxed{\varphi_1 \text{ n'est pas surjective}}$.

     Après coup : on peut conclure bien rapidement en donnant tout de suite les contre-exemples.
   - φ_2
     - Injectivité : soient z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $i\overline{z}_1 + 3 = i\overline{z}_2 + 3$. En déduit-on $z_1 = z_2$? On déduit effectivement $i\overline{z}_1 = i\overline{z}_2$ puis $\overline{z}_1 = \overline{z}_2$ puis $z_1 = z_2$ donc $\boxed{\varphi_2 \text{ est injective}}$.
     - Surjectivité : soit $w \in \mathbb{C}$, existe-t-il $z \in \mathbb{C}$ tel que $i\overline{z} + 3 = w$? Cette condition est équivalente à

$$
\begin{aligned}
& i\overline{z} + 3 = w && (45)\\
\iff\ & i\overline{z} = w - 3 && (46)\\
\iff\ & \overline{z} = -iw + 3i && (47)\\
\iff\ & z = i\overline{w} - 3i && (48)
\end{aligned}
$$

       (on utilise $\frac{1}{i} = -i$ pour passer le i à droite). Cette équation a bien une solution z, quelque soit w, donc $\boxed{\varphi_2 \text{ est surjective}}$.

     Après coup : ici la méthode « tout d'un coup » est clairement meilleure, le calcul fait dans la surjectivité montre directement que φ_2 est bijective et donne sa bijection réciproque $w \in \mathbb{C} \mapsto i\overline{w} - 3i$.
   - φ_3
     - Injectivité : soient deux fonctions f_1, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f_1(1) - f_1(0) = f_2(1) - f_2(0)$. Peut-on alors démontrer $\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = f_2(x)$? Probablement pas, car une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est beaucoup plus de choses que sa valeur en 0 et en 1… Un contre-exemple : $f_1 : x \mapsto 0$ et $f_2 : x \mapsto x$. Donc $\boxed{\varphi_3 \text{ n'est pas injective}}$.
     - Surjectivité : soit $y \in \mathbb{R}$, existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(1) - f(0) = y$? Une fonction constante ne donne rien mais $f : x \mapsto yx$ fonctionne. Donc $\boxed{\varphi_3 \text{ est surjective}}$.

     Après coup : encore une fois on peut donner rapidement le contre-exemple après recherche au brouillon. En fait, comme f n'est même pas supposée continue, on peut former des exemples encore plus simple : pour la surjectivité, prendre f une fonction nulle partout sauf $f(1) = y$… Et pour l'injectivité aussi, prendre des fonctions f_1, f_2 nulles partout mais poser $f_1(1) = 1$ alors que $f_2(1) = 2$.
2. D'abord vérifions le domaine de définition : pour $x \mapsto x^2 + 4x + 7$, on calcule $\Delta = 4^2 - 4 \times 7 = -12 < 0$ donc ne s'annule jamais, et f est définie sur $\mathbb{R}$ et aussi dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+7}} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+7}} \tag{49}$$

   qui change de signe en $x = -2$ et $f(-2) = \sqrt{3}$. Le tableau de variations est alors :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

(50)

On lit que f est strictement croissante et continue sur $[-2,+\infty[$ et donc par le $\boxed{\text{théorème de la bijection}}$, f induit une bijection de $[-2,+\infty[$ vers $[\sqrt{3},+\infty[$.
Soient alors $y \in [\sqrt{3},+\infty[$, $x \in [-2,+\infty[$. L'équation $f(x)=y$ est équivalente à

$$\begin{aligned} f(x)=y &\iff \sqrt{x^2+4x+7}=y && (51)\\ &\iff x^2+4x+7=y^2 && (52)\\ &\iff x^2+4x+(7-y^2)=0 && (53)\end{aligned}$$

Sous cette forme, il s'agit d'une équation de degré 2 à paramètre. On pose $\Delta_y = 4^2-4\times(7-y^2)=4(y^2-3)$. On voit alors $\Delta_y \geqslant 0$ si et seulement si $y \geqslant \sqrt{3}$ (car $y \geqslant 0$), ce qui re-démontre mais sans aucun tableau de variations que l'image $f(\mathbb{R})$ est exactement $[\sqrt{3},+\infty[$. Les solutions sont alors $x=\frac{-4\pm\sqrt{4(y^2-3)}}{2}$ soit

$$x_1=-2-\sqrt{y^2-3} \quad \text{et} \quad x_2=-2+\sqrt{y^2-3} \tag{54}$$

Vérification des intervalles : x_1 est en fait l'unique antécédent de y dans $]-\infty,-2]$ et x_2 est l'unique antécédent de y dans $[-2,+\infty[$.
Conclusion : $\boxed{f_{|[-2,+\infty[} \text{ est bijective d'image } [\sqrt{3},+\infty[}$ et la bijection réciproque est alors

$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1} : [\sqrt{3},+\infty[&\longrightarrow [-2,+\infty[\\ y &\longmapsto -2+\sqrt{y^2-3}\end{aligned}} \tag{55}$$

En fait, l'étape tableau de variations n'est pas strictement nécessaire : si l'étape équation à paramètre est menée rigoureusement, elle contient déjà tout. Avec la mise sous forme canonique, c'est encore plus évident : $f(x)=\sqrt{(x+2)^3+3}$ *est une composée de bijections (quand on restreint à* $[-2,+\infty[$*) et sous cette forme résoudre l'équation* $f(x)=y$ *est encore plus facile.*

Problème 2

1. On a besoin des coefficients binomiaux pour $n=1,2,3$:

$$\begin{array}{c|cccc} n\backslash k & 0 & 1 & 2 & 3\\ \hline 0 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ 2 & 1 & 2 & 1 & \\ 3 & 1 & 3 & 3 & 1 \end{array} \tag{56}$$

Pour $n=1$ il s'agit alors de

$$1\times\frac{1}{1}=\frac{1}{1} \tag{57}$$

Pour $n=2$:

$$2\times\frac{1}{1}-1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2} \tag{58}$$

Pour $n=3$:

$$3\times\frac{1}{1}-3\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \tag{59}$$

Ces trois égalités sont $\boxed{\text{vraies}}$.

2. (a) Soit $n \geqslant 1$, soit $1 \leqslant k \leqslant n$. Alors tous les coefficients binomiaux sont bien définis par leur formule avec des factoriels (ils sont « à l'intérieur du triangle de Pascal »). D'une part

$$\frac{1}{k}\binom{n+1}{k} = \boxed{\frac{1}{k}\times\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}} \tag{60}$$

D'autre part :

$$\frac{1}{k}\binom{n}{k}+\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k} = \frac{1}{k}\times\frac{n!}{k!\,(n-k)!}+\frac{1}{n+1}\times\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} \tag{61}$$
$$= \frac{1}{k}\times\frac{n!}{k!\,(n-k)!}+\frac{n!}{k!\,(n+1-k)!} \tag{62}$$
$$= \frac{1}{k}\times\frac{(n+1-k)\times n!}{k!\,(n+1-k)!}+\frac{1}{k}\times\frac{k\times n!}{k!\,(n+1-k)!} \tag{63}$$
$$= \frac{1}{k}\times\left(\frac{(n+1-k)\times n!}{k!\,(n+1-k)!}+\frac{k\times n!}{k!\,(n+1-k)!}\right) \tag{64}$$
$$= \frac{1}{k}\times\frac{(n+1)\times n!}{k!\,(n+1-k)!} \tag{65}$$
$$= \boxed{\frac{1}{k}\times\frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}} \tag{66}$$

C'est bien la même chose, donc il y a égalité.

Remarque : c'est, en une seule égalité, la formule de Pascal $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$ *qu'on divise par* k *des deux côtés, et la formule du pion qui implique* $\frac{1}{k}\binom{n}{k-1}=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}$.

(b) i. Soit $n\geqslant 1$. Appliquons l'égalité précédente au rang $n+1$ dans S_{n+1}, en sortant d'abord le terme pour $k=n+1$ de la somme :

$$S_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{1}{k}\binom{n+1}{k}\right)\times(-1)^{k-1} \tag{67}$$
$$=\frac{(-1)^n}{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\binom{n+1}{k}\right)\times(-1)^{k-1} \tag{68}$$
$$=\frac{(-1)^n}{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\binom{n}{k}+\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}\right)\times(-1)^{k-1} \tag{69}$$
$$=\frac{(-1)^n}{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\frac{(-1)^{k-1}}{n+1} \tag{70}$$

On reconnait alors S_n et c'est l'égalité demandée :

$$\boxed{S_{n+1}=S_n+\frac{(-1)^n}{n+1}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k}} \tag{71}$$

ii. Calculons $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k}$: c'est un $\boxed{\text{binôme de Newton}}$ à une puissance $n+1$, il faut donc faire apparaitre les termes $k=0$ et $k=n+1$ de la somme.

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k} = -\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{n+1}{k} \tag{72}$$
$$= -\left(\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{k}\binom{n+1}{k}-1-(-1)^{n+1}\right) \tag{73}$$
$$= -\left((1-1)^{n+1}-1-(-1)^{n+1}\right) \tag{74}$$
$$= \boxed{1+(-1)^n} \tag{75}$$

(c) Les deux questions précédentes donnent alors : pour tout $n\geqslant 1$

$$S_{n+1}=S_n+\frac{(-1)^n}{n+1}+\frac{1}{n+1}(1+(-1)^n)=\boxed{S_n+\frac{1}{n+1}=S_{n+1}} \tag{76}$$

On démontre alors par récurrence : $\forall n\geqslant 1,\ S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$:

- $n = 1$: déjà établi à la première question.
- Soit $n \geqslant 1$, supposons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, alors $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{n+1} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$.

Conclusion : c'est bien ce qu'on voulait démontrer

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \tag{77}$$

3. (a) *La somme S_n ci-dessus est $F(1)$.*
La fonction F est bien dérivable sur $\mathbb{R}$, elle ne contient que des puissances strictement positives de x (pas de constante) et la dérivée de $x \mapsto x^k$ est $x \mapsto kx^{k-1}$. Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} x^{k-1} \tag{78}$$

Sous cette forme, on reconnait un $\boxed{\text{binôme de Newton}}$, pour $(1-x)^n$ à condition d'ajuster les puissances et signes. Cela nécessite de prendre $x \neq 0$:

$$F'(x) = -\frac{1}{x} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-x)^k = -\frac{1}{x}\Big((1-x)^n - 1\Big) \tag{79}$$

C'est alors bien l'égalité demandée :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad F'(x) = \frac{1-(1-x)^n}{x}} \tag{80}$$

Remarque : cette dernière inégalité n'est pas vraie pour $x = 0$, mais la précédente si, et $F'(0) = n$ (le terme pour $k = 1$).

(b) De même, on peut dériver terme à terme, la dérivée de $x \mapsto \frac{(1-x)^{k+1}}{k+1}$ est $x \mapsto -(1-x)^k$, quant à la deuxième somme c'est une constante (ne dépend pas de x) et on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (1-x)^k \tag{81}$$

Cette fois, c'est la formule de $\boxed{\text{somme d'une suite géométrique}}$ qui s'applique pour une raison différente de 1 soit $x \neq 0$:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad G'(x) = \frac{1-(1-x)^n}{x}} \tag{82}$$

Pour $x = 0$, on trouve aussi directement avec la ligne précédente $G'(0) = n$.

(c) On a démontré : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = G'(x)$ (il faut séparer soigneusement le cas $x = 0$). C'est une égalité sur $\mathbb{R}$ entre fonctions dérivables : cela ne signifie pas directement qu'elles sont égales, mais seulement égales à une constante additive près. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = G(x) + C$. Mais en regardant la valeur en 0 on trouve directement $F(0) = 0$ et $G(0) = 0$ aussi, donc $C = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = G(x)} \tag{83}$$

En regardant alors en $x = 1$, la première somme définissant G s'annule :

$$F(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \tag{84}$$

Quitte à poser le changement d'indice $k \leftarrow k+1$, c'est bien

$$\boxed{F(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \tag{85}$$

et c'est l'égalité demandée.