DS 4 Mathématiques

Exercice 1

Déterminer le domaine de définition des fonctions réelles suivantes.

$$f : x \mapsto \tan(\ln(x)) \qquad g : x \mapsto \arccos\left(3\sqrt{x} - 2\right)$$

$$h : x \mapsto \frac{1}{\lfloor 2x+3 \rfloor} \qquad i : x \mapsto \sqrt[3]{\arctan(x)}$$

Problème 1

Le but est de trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$(*) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y)f(x-y) = f^2(x)f^2(y)$$

1. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ vérifie $(*)$.

On raisonne par analyse-synthèse et on se donne maintenant une fonction f qui vérifie $(*)$.

2. Montrer que $f(0) \in \{-1, 0, 1\}$.
3. Montrer que :
   - Si $f(0) = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$,
   - Si $f(0) = 1$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$,
   - Si $f(0) = -1$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant 0$.
4. Dans cette question on suppose qu'il existe un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$.
   (a) Montrer que $f(x/2) = 0$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x/2^n) = 0$ puis en déduire $f(0) = 0$.
5. Justifier que si $f(0) \neq 0$, alors ou bien $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$, ou bien $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) < 0$.

On fait alors l'hypothèse $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$. On pose $g = \ln \circ f$ et $\lambda = g(1)$. On note $(**)$ la condition vérifiée par g :

$$(**) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x+y) + g(x-y) = 2g(x) + 2g(y)$$

6. Montrer que g est paire.
7. Établir que $g(2) = 4\lambda$ puis que $g(3) = 9\lambda$.
8. (a) Démontrer par récurrence : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(nx) = n^2 g(x)$.
   (b) Justifier que cette relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
9. Soit r un nombre rationnel, qu'on écrit $r = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $g(r) = \lambda r^2$.
10. On fixe maintenant $x \in \mathbb{R}$ quelconque, et pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $r_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.
    (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x - \frac{1}{n} < r_n \leqslant x$.
    (b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = x$.
    (c) Conclure que $g(x) = \lambda x^2$.
11. Conclure soigneusement en donnant exactement toutes les fonctions qui vérifient $(**)$ puis $(*)$.

Exercice d'informatique

On représente un nombre entier, donné avec son écriture décimale à p chiffres $N = a_{p-1} \cdots a_1 a_0$, par la liste `L` des chiffres rangés dans l'ordre inverse : `L = [`a_0`, `a_1`, ..., `a_{p-1}`]`. Le nombre N a alors pour valeur $\sum_{i=0}^{p-1} a_i 10^i$.
Par exemple, le nombre $N = 2025$ est représenté par la liste `L = [5, 2, 0, 2]` et il est bien connu que sa valeur est alors $2025 = 5 \times 10^0 + 2 \times 10^1 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^3$.
On suppose que toutes les listes sont bien composées de nombres entiers et sont (après la question 1) valides.

1. Écrire une fonction `est_valide(L)` qui renvoie `True` si la liste `L` est composée uniquement de nombres entre 0 et 9, et `False` sinon.

2. Écrire une fonction `valeur(L)` qui prend en argument une telle liste et qui renvoie la valeur que la liste représente.
3. Écrire une fonction `doublesept(L)` qui renvoie `True` si le nombre représenté par `L` contient au moins une fois deux chiffres 7 consécutifs (par exemple $N = 1377604$, ou aussi $N = 377782$, mais pas $N = 78207173$), et `False` sinon.
4. Un nombre N est divisible par 10 si et seulement si son écriture décimale se termine par 0 ; il est divisible par 100 si et seulement si elle se termine par 00 ; etc. Le plus grand entier $k \geqslant 0$ tel que N soit divisible par 10^k est donc le plus grand nombre de zéros consécutifs dans son écriture décimale.

   Écrire une fonction `divisible(L)` qui renvoie le plus grand entier $k \geqslant 0$ tel que la liste `L` démarre par k zéros.
5. Écrire une fonction `foisdix(L)` qui prend en argument une liste `L`, représentant un nombre N, et renvoie une nouvelle liste qui représente le nombre $10 \times N$.

Exercice 2

1. Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes.

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \lfloor x \rfloor \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varphi_2 : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto i\overline{z} + 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varphi_3 : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(1) - f(0) \end{aligned}$$

2. Montrer que $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 4x + 7}$ induit une bijection de $[-2, +\infty[$ vers un intervalle I de $\mathbb{R}$ à déterminer, puis donner la bijection réciproque.

Problème 2

Le but est de démontrer de deux façons l'égalité surprenante :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. Vérifier la formule pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.
2. Méthode 1 : calcul sur les coefficients binomiaux. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, pour tout $n \geqslant 1$.
   (a) Justifier : $\forall n \geqslant 1$, $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $\dfrac{1}{k}\dbinom{n+1}{k} = \dfrac{1}{k}\dbinom{n}{k} + \dfrac{1}{n+1}\dbinom{n+1}{k}$.
   (b) i. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$: $S_{n+1} = S_n + \dfrac{(-1)^n}{n+1} + \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k}$.
   ii. Calculer cette dernière somme.
   (c) Conclure par récurrence sur $n \geqslant 1$.
3. Méthode 2 : on pose la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.
   (a) Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $F'(x) = \dfrac{1 - (1-x)^n}{x}$.
   (b) On pose la fonction $G : x \mapsto -\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-x)^{k+1}}{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$. Justifier $\forall x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = F'(x)$.
   (c) Conclure.