DS 6 Mathématiques
Correction

Exercice

- I On intègre par parties $1 \times \arctan(\heartsuit)$:

$$u(\heartsuit) = \heartsuit \qquad u'(\heartsuit) = 1 \tag{1}$$
$$v(\heartsuit) = \arctan(\heartsuit) \qquad v'(\heartsuit) = \frac{1}{1+\heartsuit^2} \tag{2}$$

qui sont bien continues sur $[0,1]$ et alors

$$I = \Big[\heartsuit \arctan(\heartsuit)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{\heartsuit}{1+\heartsuit^2}\,\mathrm{d}\heartsuit \tag{3}$$

Dans cette dernière on reconnait une primitive en $\frac{1}{2}\ln(1+\heartsuit^2)$, de plus $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. Donc :

$$I = \left(\frac{\pi}{4} \times 1 - 0\right) - \left[\frac{1}{2}\ln(1+\heartsuit^2)\right]_0^1 \tag{4}$$

soit

$$\boxed{I = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}} \tag{5}$$

- J On pose $x = t^2$: c'est le changement de variables donné par la fonction $\varphi : t \mapsto t^2$ définie sur $[0, \ln(3)]$ à valeurs dans $[0, \ln^2(3)]$ qui est bien dérivable avec $\varphi'(t) = 2t$, autrement dit pour la « forme différentielle »

$$e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2te^t\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

ce qui ramène ainsi le calcul à

$$J = \int_0^{\ln(3)} 2te^t\,\mathrm{d}t = \boxed{2\int_0^{\ln(3)} te^t\,\mathrm{d}t = J} \tag{7}$$

Cette dernière est une intégration par parties classique : on pose

$$u(t) = t \qquad u'(t) = 1 \tag{8}$$
$$v'(t) = e^t \qquad t(t) = e^t \tag{9}$$

d'où

$$J = 2\left(\Big[te^t\Big]_0^{\ln(3)} - \int_0^{\ln(3)} 1 \times e^t\,\mathrm{d}t\right) \tag{10}$$

Tout se calcule alors assez directement :

$$J = 2\left((3\ln(3) - 0) - \Big[e^t\Big]_0^{\ln(3)}\right) \tag{11}$$

soit

$$\boxed{J = 6\ln(3) - 4} \tag{12}$$

- K D'abord on a bien $2u^2 + 7u + 3 = (2u+1)(u+3)$. Analyse : on cherche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall u \in \mathbb{R} \setminus \left\{-3, -\frac{1}{2}\right\}, \quad \frac{u}{2u^2+7u+3} = \frac{a}{2u+1} + \frac{b}{u+3} \tag{13}$$

Ceci se regroupe en

$$\frac{u}{2u^2+7u+3} = \frac{(a+2b)u+(3a+b)}{(2u+1)(u+3)} \tag{14}$$

et on veut donc

$$\begin{cases} a+2b=1 \\ 3a+b=0 \end{cases} \tag{15}$$

On trouve alors $a=-\frac{1}{5}$ et $b=\frac{3}{5}$.
Synthèse : on a alors bien

$$\forall u \in \mathbb{R} \setminus \left\{-3, -\frac{1}{2}\right\}, \quad \boxed{\frac{u}{2u^2+7u+3} = -\frac{1}{5} \times \frac{1}{2u+1} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{u+3}} \tag{16}$$

Par linéarité on obtient alors

$$\boxed{K = -\frac{1}{5}\int_1^4 \frac{\mathrm{d}u}{2u+1} + \frac{3}{5}\int_1^4 \frac{\mathrm{d}u}{u+3}} \tag{17}$$

Calcul des primitives avec ln, les termes à intégrer sont strictement positifs sur $[1,4]$:

$$K = -\frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}\ln(2u+1)\right]_1^4 + \frac{3}{5}\Big[\ln(u+3)\Big]_1^4 \tag{18}$$

Calcul et simplification avec $\ln(4)=2\ln(2)$ et $\ln(9)=2\ln(3)$:

$$\boxed{K = -\frac{6}{5}\ln(2) - \frac{1}{10}\ln(3) + \frac{3}{5}\ln(7)} \tag{19}$$

Problème 1

1. On trouve des primitives directement :

$$I_{n,0} = \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^n}{n+1}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{n+1} = I_{n,0}} \tag{20}$$

et (attention aux signes et à l'ordre des bornes)

$$I_{0,n} = \int_0^1 (1-x)^n \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{(1-x)^n}{n+1}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{n+1} = I_{0,n}} \tag{21}$$

2. On pose $t=1-x$, ce qui est la même chose que $x=1-t$. Alors $x=0$ correspond à $t=1$ et $x=1$ à $t=0$, et on a bien $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t$ et donc pour la forme différentielle

$$x^p(1-x)^q \,\mathrm{d}x = -(1-t)^p t^q \,\mathrm{d}t \tag{22}$$

On applique donc bien la formule du changement de variable avec $\varphi(t)=1-t$:

$$I_{p,q} = -\int_1^0 (1-t)^p t^q \,\mathrm{d}t \tag{23}$$

On peut alors utiliser le signe moins et changer l'ordre des bornes, ainsi que l'ordre du produit :

$$\boxed{I_{p,q} = \int_0^1 t^q (1-t)^p \,\mathrm{d}t = I_{q,p}} \tag{24}$$

Remarque : cela se passe toujours ainsi pour un changement de variables par une fonction décroissante. *Les bornes apparaissent d'abord dans le mauvais sens, mais en même temps φ' est négative et fait apparaitre un signe moins, qui permet de remettre les bornes dans le bon sens. Dans tous les cas l'intégrale $I_{p,q}$ est positive car c'est l'intégrale d'une fonction positive sur $[0,1]$, et $I_{q,p}$ aussi, donc on ne peut pas trouver $I_{p,q}=-I_{q,p}$.*

3. Dans $I_{p,q+1}$, on intègre par parties en posant

$$u(x) = (1-x)^{q+1} \qquad u'(x) = -(q+1)(1-x)^q \tag{25}$$
$$v'(x) = x^p \qquad v(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1} \tag{26}$$

alors
$$I_{p,q+1} = \left[(1-x)^{q+1} \times \frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-(q+1)(1-x)^q \times \frac{x^{p+1}}{p+1}\right) \mathrm{d}x \tag{27}$$

Le terme entre crochets est nul à la fois pour $x = 0$ et $x = 1$.
Attention : cela nécessite que les puissances soient strictement positives... x^p n'est pas nul en $x = 0$ si $p = 0$!
Par linéarité on déduit alors directement

$$\boxed{I_{p,q+1} = \frac{q+1}{p+1} \int_0^1 x^{p+1}(1-x)^q \,\mathrm{d}x = I_{p+1,q}} \tag{28}$$

4. Démontrons cette propriété par récurrence. Attention à l'ordre des quantificateurs : le $\forall q$ est devant (on a besoin de passer de q à $q+1$) et le $\forall p$ est sous l'hypothèse de récurrence (on va appliquer $\mathcal{P}(q)$ pour des valeurs différentes de p).
   - Initialisation : pour $q = 0$, il s'agit de démontrer :
   $$\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{p,0} = \frac{p!}{(p+1)!} \tag{29}$$
   Or on sait que $I_{p,0} = \frac{1}{p+1}$, et $\frac{p!}{(p+1)!} = \frac{1}{p+1}$ aussi. Donc $\boxed{\mathcal{P}(0) \text{ est vraie}}$.
   - Hérédité : soit $q \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(q)$:
   $$\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{p,q} = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!} \tag{30}$$
   On se donne alors un $p \in \mathbb{N}$ et on applique alors évidemment la relation démontrée à la question précédente :
   $$I_{p,q+1} = \frac{q+1}{p+1} I_{p+1,q} = \frac{q+1}{p+1} \times \frac{(p+1)!\,q!}{(p+1+q+1)!} \tag{31}$$
   Cela est bien valide car on applique l'hypothèse $\mathcal{P}(q)$, avec une autre valeur de p mais le $\forall p$ est dans l'hypothèse de récurrence ! Alors en jouant sur les factorielles
   $$I_{p,q+1} = \frac{p!\,(q+1)!}{(p+1+q+1)!} = \frac{p!\,(q+1)!}{(p+(q+1)+1)!} \tag{32}$$
   et ceci est bien ce qu'on veut au rang $q+1$, quelque soit p. Donc $\boxed{\mathcal{P}(q+1) \text{ est vraie}}$.

   En conclusion on a bien montré $\mathcal{P}(q)$, pour tout entier q, où $\mathcal{P}(q)$ contientle quantificateur $\forall p$. Donc la formule est vraie pour tous p et tous q.

5. (a) Développons avec le $\boxed{\text{binôme de Newton}}$ (les coefficients binomiaux ne vont pas apparaitre de nulle part !) : pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\forall x \in [0,1], \quad (1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^k \tag{33}$$
   et donc
   $$I_{n,n} = \int_0^1 x^n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^k\right) \mathrm{d}x \tag{34}$$
   Par linéarité alors
   $$I_{n,n} = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x^{n+k}\right) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 x^{n+k} \,\mathrm{d}x \tag{35}$$

Or on calcule comme toujours

$$\int_0^1 x^{n+k}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+k+1}}{n+k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+k+1} \tag{36}$$

et on reconnait alors directement $\boxed{I_{n,n} = S_n}$.

(b) Par la formule démontrée par récurrence, on déduit alors :

$$S_n = \frac{n!\,n!}{(2n+1)!} \tag{37}$$

Rappelons que $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$. Il suffit alors de remarquer

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n+1)\times(2n)!}{(2n+1)\times n!\,n!} = \frac{(2n+1)!}{(2n+1)n!\,n!} \tag{38}$$

pour trouver directement

$$\boxed{S_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}(2n+1)}} \tag{39}$$

Problème 2

1. On forme

$$\boxed{A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 5 & 6 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}} \tag{40}$$

Pour échelonner on place la ligne L_2 au-dessus, et L_1 en dessous :

$$A - \lambda I_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{2} & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 4-\lambda \\ -1-\lambda & 5 & 6 \end{pmatrix} \tag{41}$$

Le rang est au moins 1. On peut alors effectuer $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow 2L_3 + (1+\lambda)L_1$:

$$A - \lambda I_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{2} & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \\ 0 & \alpha & 12 \end{pmatrix} \tag{42}$$

où on calcule à part le coefficient : $\alpha = 12 + (1+\lambda)(2-\lambda) = 12 + \lambda - \lambda^2$.
Il est alors plus facile de distinguer le cas $\lambda = 4$: alors

$$A - \lambda I_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{2} & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{43}$$

donc le rang est 2.
Si $\lambda \neq 4$ alors on peut simplifier L_2 :

$$A - \lambda I_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{2} & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 12 \end{pmatrix} \underset{L3 \leftarrow L_3 - \alpha L_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 2-\lambda & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \tag{44}$$

où le coefficient β se calcule aussi à part : $\beta = 12 - (12 + \lambda - \lambda^2) = -\lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda - 1)$. Ainsi pour $\lambda \neq 4$:

$$A - \lambda I_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} \boxed{2} & 2-\lambda & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda(\lambda-1)} \end{pmatrix} \tag{45}$$

On lit alors que le rang est au moins 2 ; il est 3 si le coefficient en bas à droite est non-nul c'est-à-dire $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$, sinon il est 2.
En résumé :

$$\boxed{\mathrm{rang}(A) = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda \in \{0,1,4\} \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}} \tag{46}$$

2. *On rédige ici cette question avec la méthode « naïve » ; la méthode de former la matrice augmentée est certes élégante, mais n'est pas exigible.*
Soient $X = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$, $Y = \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \\ w \end{smallmatrix}\right)$ des matrices colonnes dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. L'équation $PX = Y$ est équivalente au système linéaire

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = u \\ -2x - y + z = v \\ 2x + y = w \end{cases} \tag{47}$$

On échelonne alors, d'abord avec $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$:

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{x} + y + z = u \\ y + 3z = 2u + v \\ -y - 2z = -2u + w \end{cases} \tag{48}$$

puis avec $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$:

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{x} + y + z = u \\ \boxed{y} + 3z = 2u + v \\ \boxed{z} = v + w \end{cases} \tag{49}$$

À ce stade le système est échelonné et $\boxed{\text{de Cramer}}$ ce qui correspond déjà au fait que $PX = Y$ admet une unique solution pour X, quelque soit Y : la matrice P est $\boxed{\text{inversible}}$.
On résout alors en remontant : d'abord $z = v + w$ puis $y = 2u + v - 3w$ soit $y = 2u - 2v - 3w$, et enfin $x = -u + v + 2w$. On ré-écrit tout cela comme la colonne X donnée en fonction de Y par une matrice :

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \tag{50}$$

Cela démontre que :

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \tag{51}$$

3. Calcul :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{52}$$

ce qui est exactement $\boxed{P^{-1}AP = D}$

4. (a) On cherche une racine carrée de D qui soit une matrice diagonale : on pose $Q = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{smallmatrix}\right)$ pour $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Alors Q est une racine carrée de D si et seulement si :

$$Q^2 = D \iff \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{53}$$

Ceci est équivalent à $\alpha^2 = 1$ et $\beta^2 = 0$ et $\gamma^2 = 4$. On trouve alors 4 triplets de solutions

$$(\alpha, \beta, \gamma) \in \Big\{(1,0,2), (-1,0,2), (1,0,-2), (-1,0,-2)\Big\} \tag{54}$$

ce qui correspond aux 4 matrices

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad Q_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{55}$$

Remarque : $Q_3 = -Q_2$ et $Q_4 = -Q_1$.

(b) Pour $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $Q^2 = D$ alors

$$\left(PQP^{-1}\right)^2 = PQP^{-1}PQP^{-1} = PQ^2P^{-1} = PDP^{-1} \tag{56}$$

Or l'équation $P^{-1}AP = D$ est équivalente à $AP = PD$ (en multipliant deux deux côtés par P à gauche) puis à $A = PDP^{-1}$ (en multipliant des deux côtés par P^{-1} à droite). On trouve donc bien $\boxed{\left(PQP^{-1}\right)^2 = A}$, ce qui nous donne en théorie 4 matrices.

Il reste éventuellement à vérifier qu'elles sont bien distinctes… Mais si on avait $PQP^{-1} = PQ'P^{-1}$ pour deux matrices Q, Q' parmi Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 alors encore en multipliant par P^{-1} à gauche et par P à droite on trouverait $Q = Q'$. On a donc bien trouvé 4 racines carrées distinctes de A.

Remarque : cela signifie que l'application $Q \mapsto PQP^{-1}$ est bijective, d'inverse $R \mapsto P^{-1}RP$.

En résumé on a obtenu les 4 matrices racines carrées de A (calcul) :

$$R_1 = PQ_1P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad R_2 = PQ_2P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \tag{57}$$

$$R_3 = PQ_3P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -6 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad R_4 = PQ_1P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \tag{58}$$

Remarque : là encore $R_3 = -R_2$ et $R_4 = -R_1$.

5. (a) *Question souvent mal comprise : ici S est supposée être une matrice* quelconque *telle que $S^2 = D$, il faut donc raisonner de façon algébrique. Si on prend pour S l'une des matrices Q_i ci-dessus alors c'est évident puisqu'on les a déjà choisies diagonales, or notre but final est justement de montrer que si S est telle que $S^2 = D$ alors S doit être diagonale.*

Si on a $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $S^2 = D$ alors

$$SD = SS^2 = S^3 = S^2S = DS \tag{59}$$

ce qui signifie précisément que $\boxed{S \text{ et } D \text{ commutent}}$.

Remarque : c'est la propriété d'associativité qui a pour conséquence qu'une matrice commute avec ses puissances, le produit $S \cdot S \cdot S$ peut s'associer de deux façons différentes.

(b) On pose $S = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} \\ s_{3,1} & s_{3,2} & s_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La condition $SD = DS$ est équivalente à

$$\begin{pmatrix} s_{1,1} & 0 & 4s_{1,3} \\ s_{2,1} & 0 & 4s_{2,3} \\ s_{3,1} & 0 & 4s_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 4s_{3,1} & 4s_{3,2} & 4s_{3,3} \end{pmatrix} \tag{60}$$

En tant que système d'équations à 9 inconnues, cela donne

- $s_{1,1} = s_{1,1}$ sans autre condition : c'est une variable libre,
- $s_{1,2} = 0$,
- $4s_{1,3} = s_{1,3}$ donc $s_{1,3} = 0$,
- $s_{2,1} = 0$,
- $4s_{2,3} = 0$ donc $s_{2,3} = 0$,
- $s_{3,1} = 4s_{3,1}$ donc $s_{3,1} = 0$,
- $4s_{3,2} = 0$ donc $s_{3,2} = 0$,

- $4s_{3,3} = 4s_{3,3}$ donc $s_{3,3}$ est une variable libre,
- il reste $s_{2,2}$ qui n'apparait pas, qui est aussi une variable libre.

En résumé la condition est *équivalente* à

$$SD = DS \Longleftrightarrow S = \begin{pmatrix} s_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & s_{3,3} \end{pmatrix} \tag{61}$$

c'est-à-dire que $\boxed{S \text{ est une matrice diagonale}}$.

(c) Si Q est une racine carrée de D, alors par la question précédente Q est diagonale, et c'est le cas que nous avons traité à la question 4. Ce sont donc bien les 4 racines carrées de D.

On peut alors on déduire que nous avons trouvé toutes les racines carrées de A : soit R une racine carrée de A, alors $R^2 = A$ ce qui est équivalent à $\left(P^{-1}RP\right)^2 = P^{-1}AP$, donc la matrice $Q = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D. On retrouve alors $R = PQP^{-1}$.

En résumé $\boxed{\text{on a trouvé exactement toutes les racines carrées de } A}$.

Problème 3

Erreur d'énoncé : il s'agit bien du système

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) = x(t) + 2y(t) + 5t^2 \\ y'(t) = 3y(t) - x(t) + e^{2t}\sin(t) \end{cases} \tag{62}$$

ainsi il n'y a jamais de $\sin(2t)$*.*

1. On dérive x' :

$$x''(t) = x'(t) + 2y'(t) + 10t \tag{63}$$

puis on remplace y' :

$$x''(t) = x'(t) + 2\Big(3y(t) - x(t) + e^{2t}\sin(t)\Big) + 10t \tag{64}$$

Enfin on remplace $y(t)$ par $\frac{1}{2}(x'(t) - x(t) - 5t^2)$ et on trouve alors :

$$\boxed{x''(t) = 4x'(t) - 5x(t) + 10t - 15t^2 + 2e^{2t}\sin(t)} \tag{65}$$

C'est bien de la forme proposée $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = P(t) + 2e^{2t}\sin(t)$ avec $\boxed{P(t) = -15t^2 + 10t}$.

2. L'équation homogène associée à (E) est $x''(t) - 4x'(t) + 5x(t)$. L'équation caractéristique d'inconnue $r \in \mathbb{C}$ est $r^2 - 4r + 5 = 0$. Ici $\Delta = -4 < 0$ et les deux solution sont $r = 2 \pm i$. L'ensemble des solutions est alors

$$\boxed{\left\{t \mapsto e^{2t}(\lambda\cos(t) + \mu\sin(t)) \middle| (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}} \tag{66}$$

3. - Analyse : on cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que si on pose $x_1 : t \mapsto at^2 + bt + c$ alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x_1''(t) - 4x_1'(t) + 5x_1(t) = -15t^2 + 10t \tag{67}$$

Or on calcule $x_1'(t) = 2at + b$ et $x_1''(t) = 2a$, qui est donc solution si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 5at^2 + (-8a + 5b)t + (2a - 4b + 5c) = -15t^2 + 10t \tag{68}$$

autrement dit on veut

$$\begin{cases} 5a = -15 \\ -8a + 5b = 10 \\ 2a - 4b + 5c = 0 \end{cases} \tag{69}$$

On trouve une unique solution : $\boxed{a = -3}$, $\boxed{b = -\frac{14}{5}}$, $\boxed{c = -\frac{26}{25}}$.

- Synthèse : on pose

$$\boxed{x_1 : t \mapsto -3t^2 - \frac{14}{5}t - \frac{26}{25}} \tag{70}$$

qui est bien une solution particulière de (E_1).

4. (a) On pose $x_2 : t \mapsto e^{2t}\lambda(t)\cos(t)$ et on dérive deux fois. C'est un produit de trois termes donc on en choisit d'abord deux à grouper, à la fin tout se regroupe sous forme $e^{2t}(A\cos(t) + B\sin(t))$... On trouve alors

$$x_2'(t) = e^{2t}(2\lambda(t)\cos(t) + \lambda'(t)\cos(t) - \lambda(t)\sin(t)) \tag{71}$$

puis

$$\begin{aligned} x_2''(t) = e^{2t}\Big(&(4\lambda(t)\cos(t) + 2\lambda'(t)\cos(t) - 2\lambda(t)\sin(t)) \\ &+ (2\lambda'(t)\cos(t) - 2\lambda(t)\sin(t) + \lambda''(t)\cos(t) - \lambda'(t)\sin(t) - \lambda'(t)\sin(t) - \lambda(t)\cos(t))\Big) \end{aligned} \tag{72}$$

soit

$$x_2''(t) = e^{2t}\Big((3\lambda(t) + 4\lambda'(t) + \lambda''(t))\cos(t) + (-4\lambda(t) - 2\lambda'(t))\sin(t)\Big) \tag{73}$$

On remplace :

$$x_2''(t) - 4x_2'(t) + 5x_2(t) = e^{2t}\Big(\lambda''(t)\cos(t) - 2\lambda'(t)\sin(t)\Big) \tag{74}$$

et donc supposer que ce x_2 est solution de (E_2) revient à

$$e^{2t}\Big(\lambda''(t)\cos(t) - 2\lambda'(t)\sin(t)\Big) = e^{2t}\sin(t) \tag{75}$$

On peut simplifier par e^{2t} : cela revient à

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda''(t)\cos(t) - 2\lambda'(t)\sin(t) = 2\sin(t)} \tag{76}$$

Il s'agit effectivement d'une équation différentielle *d'ordre* 1 *pour* λ' : quitte à poser $z = \lambda'$ c'est $z'\cos(t) - 2z\sin(t) = 2\sin(t)$.

(b) C'est bien le cas : $\lambda' = -1$ est solution (alors $\lambda'' = 0$). On pose alors $\boxed{\lambda(t) = -t}$ (il suffit d'avoir *une* primitive). Par tous les calculs ci-dessus, cela montre que si on pose

$$\boxed{x_2 : t \mapsto -te^{2t}\cos(t)} \tag{77}$$

alors x_2 est une solution particulière de (E_2).

5. Par superpostion, l'ensemble des solutions pour x est la somme des solutions homogènes, de la solution particulière x_1 et de la solution particulière x_2. Ainsi

$$\boxed{x(t) = e^{2t}(\lambda\cos(t) + \mu\sin(t)) - 3t^2 - \frac{14}{5}t - \frac{26}{25} - te^{2t}\cos(t), \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2} \tag{78}$$

Pour en déduire y, on ne recommence pas tout mais on utilise

$$y(t) = \frac{1}{2}(x'(t) - x(t) - 5t^2) \tag{79}$$

d'où on déduit

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}e^{2t}\Big((\lambda + \mu - 1)\cos(t) + (-\lambda + \mu)\sin(t)\Big) - t^2 - \frac{8}{5}t - \frac{22}{25} + \frac{1}{2}te^{2t}\Big(-\cos(t) + \sin(t)\Big)} \tag{80}$$

Exercice d'informatique

1. La syntaxe correcte est $\boxed{\text{(iii)}}$: les listes de longueur p indexées par j sont à l'intérieur, donc les lignes sont de longueur p (c'est le nombre de colonnes), et on répète cette construction n fois (pour avoir une liste de n lignes)…

   Mais la syntaxe $\boxed{\text{(ii)}}$ est tout à fait correcte aussi car les noms des variables n'ont pas d'importance dans cette expression.
2. Vu en TP.

```
def identité(n):
    A = [[0 for j in range(n)] for i in range(n)]
    for i in range(n):
        A[i][i] = 1
    return 1
```

3. Double boucle pour tester l'égalité des coefficients uns par uns. Remarque : deux matrices égales doivent avoir même taille, sinon elles ne sont pas égales, il est donc plus cohérent de renvoyer **`False`** que de vouloir renvoyer une erreur avec **`assert`** *(de toute façon, utiliser* **`assert`** *n'est jamais exigible)*. Il n'y a pas de fonction déjà donnée pour la taille de la matrice…

```
def sont_égales(A, B):
    n = len(A)
    p = len(A[0])
    n2 = len(B)
    p2 = len(B[0])
    if n != n2 or p != p2:
        return False
    for i in range(n):
        for j in range(p):
            if A[i][j] != B[i][j]:
                return False
    return True
```

4. Compteur et double boucle. Banal banal banal.

```
def nombre_coeff_positifs(A):
    n = len(A)
    p = len(A[0])
    c = 0
    for i in range(n):
        for j in range(p):
            if A[i][j] >= 0:
                c = c + 1
    return c
```

5. Vu en TP. On suppose $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$: elles sont déjà multipliables.

```
def produit(A, B):
    n = len(A)
    p = len(A[0])
    q = len(B[0])
    P = [[0 for j in range(q)] for i in range(n)]
    for i in range(n):
        for j in range(q):
            for k in range(p):
                P[i][j] = P[i][j] + A[i][k] * B[k][j]
    return P
```

L'ordre de la triple boucle n'a en fait pas d'importance : on calcule tous les $A_{i,k} \times B_{k,j}$ et on les somme pour contribuer à $[AB]_{i,j}$.

6. La matrice doit être carrée de taille n, elle doit avoir n^2 coefficients positifs ou nuls, et vérifier $AU = U$. Il suffit donc d'introduire U.

```python
def est_stochastique(A):
    n = len(A)
    p = len(A[0])
    if n != p:
        return False
    if nombre_coeff_positifs(A) != n*n:
        return False
    U = [[1] for j in range(n)]
    if not sont_égales(produit(A, U), U):
        return False
    return True
```

Ce n'est pas très élégant, mais utilise les fonctions précédentes.

Démonstration de la remarque : si A et B sont toutes les deux carrées de même taille et stochastiques, alors AB est encore carrée et a encore tous ses coefficients positifs (multiplier des matrices dont tous les coefficients sont positifs ne peut pas faire apparaitre des coefficients négatifs !) ; de plus on a par hypothèse $AU = U$ et $BU = U$ donc $(AB)U = A(BU) = AU = U$.