

# DS 6 Mathématiques

## Exercice

Calculer les intégrales suivantes.

- $I = \int_0^1 \arctan(\heartsuit) d\heartsuit$
- $J = \int_0^{\ln^2(3)} e^{\sqrt{x}} dx$  en posant  $x = t^2$ .
- $K = \int_1^4 \frac{u du}{2u^2 + 7u + 3}$  en écrivant sous forme  $\frac{u}{2u^2 + 7u + 3} = \frac{a}{2u + 1} + \frac{b}{u + 3}$  pour un  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

## Problème 1

## Problème 2

**Définition.** Une *racine carrée* d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice  $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $R^2 = A$ .

Soient les matrices suivantes de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Le but est de déterminer toutes les racines carrées de  $A$ , en s'aidant de  $P$  et de  $D$ .

1. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Former la matrice  $A - \lambda I_3$  et étudier son rang en fonction de  $\lambda$ .
2. Montrer que  $P$  est inversible et calculer  $P^{-1}$ .
3. Calculer  $P^{-1}AP$  et vérifier que  $P^{-1}AP = D$ .
4. (a) Montrer qu'il existe exactement quatre matrices *diagonales* qui sont des racines carrées de  $D$ . On les note  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ .  
(b) Pour chacune de ces quatre matrices, en déduire que la matrice qu'on note  $R_i = PQ_iP^{-1}$  ( $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ) est une racine carrée de  $A$ , et en déduire que  $A$  a au moins quatre racines carrées distinctes  $R_1, R_2, R_3, R_4$ .
5. Le but est maintenant de montrer que ce sont les seules racines carrées de  $A$ .  
(a) Soit  $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  une matrice telle que  $S^2 = D$ . Montrer que  $S$  et  $D$  commutent.  
(b) En posant  $S = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} & s_{1,3} \\ s_{2,1} & s_{2,2} & s_{2,3} \\ s_{3,1} & s_{3,2} & s_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , montrer que  $SD = DS$  si et seulement si  $S$  est une matrice diagonale.  
(c) En déduire qu'à la question 4 on a trouvé exactement toutes les racines carrées de  $A$ .

## Problème 3

## Exercice d'informatique