

DS 7 Mathématiques

Problème 1

Problème 2

On définit une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes en posant

$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = (2 - 3nx^2)P_n(x) + x^3 P'_n(x)$$

1. Calculer P_1 , P_2 et P_3 , en écrivant le résultat sous forme développée.
2. Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(-x) = P_n(x)$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $\deg(P_n) \leq 2(n-1)$.
4. On note α_n le coefficient dominant de P_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Rappeler la définition de degré et de coefficient dominant d'un polynôme non-nul.
 - (b) Démontrer par récurrence que pour $n \geq 1$, P_n est de degré exactement $2(n-1)$, et donner une relation de récurrence vérifiée par $(\alpha_n)_{n \geq 1}$.
 - (c) En déduire que pour $n \geq 1$, $\alpha_n = (-1)^{n+1}(n+1)!$.
5. Calculer $P_n(0)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(Informatique) On représente un polynôme P en Python par une liste P , telle que le coefficient de x^k dans P est $P[k]$. Par exemple le polynôme $x \mapsto x^3 + 5x^2 - 7$ est représenté par la liste $P = [-7, 0, 5, 1]$.

6. Écrire une fonction `somme(P, Q)` qui prend en argument deux listes, représentant des polynômes P et Q , et qui renvoie une liste représentant la somme des deux polynômes P et Q . On ne suppose pas nécessairement que les deux listes représentant P et Q sont de même longueur.
7. Écrire de même une fonction `produit(P, Q)` qui renvoie le produit des polynômes P et Q .
8. Écrire une fonction `dérive(P)` qui renvoie la dérivée du polynôme P .
9. En déduire une fonction `P(n)` qui prend en argument un entier $n \geq 0$ et renvoie le polynôme P_n .

Soit la fonction $f : x \mapsto e^{-1/x^2}$. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n -ième de f est définie par $f^{(0)} = f$ et $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$, en particulier $f^{(1)} = f'$.

10. Calculer f' puis f'' .
11. Démontrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-1/x^2}$$

12. Étudier $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(n)}(x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on pourra poser $t = 1/x^2$).

Problème 3

Exercice