DS 8 Mathématiques

Problème 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} (1-x^2)^n & \text{si} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1 Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $n \geqslant 1$.

2 On fixe $n = 1$.

2.a Calculer $f'_d(1)$, $f'_g(1)$, $f'_g(-1)$ et $f'_d(-1)$.

2.b En déduire que f n'est pas dérivable en 1 et en -1.

2.c Représenter graphiquement f sur sa copie.

3 On suppose maintenant $n = 2$.

3.a Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3.b Montrer que f' n'est pas dérivable en 1 et en -1.

4 On suppose maintenant $n \geqslant 1$ quelconque.

4.a Démontrer par récurrence : pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, il existe un polynôme P_k tel que

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, \quad f^{(k)}(x) = \frac{(-2)^k n!}{(n-k)!} x^k (1-x^2)^{n-k} + P_k(x)(1-x^2)^{n-k+1}$$

4.b En déduire que f est $\mathcal{C}^k$ pour tous $0 \leqslant k \leqslant n-1$ mais que $f^{(n-1)}$ n'est pas dérivable en 1 et en -1.

Problème 2

Exercice

Problème 3

Soit l'équation $(E) : e^{-x} = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. On pose la fonction $f : x \mapsto x - e^{-x}$.

1 **1.a** Justifier que l'équation (E) admet une unique solution, qu'on note c, sur $\mathbb{R}$.

1.b Montrer que $c \in]0, 1[$.

1.c **(Informatique)** Écrire une fonction Python `solution(epsilon)` qui recherche une approximation de c par dichotomie, en prenant en argument un nombre réel $\varepsilon > 0$; et renvoie un couple (a, b) qui encadre c et tel que $|b - a| < \varepsilon$. On supposera qu'on a importé la fonction exponentielle `exp` du module `math` avec la commande `from math import exp as exponentielle`.

On définit maintenant une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = F(u_n) \qquad \text{où} \qquad F : x \mapsto x - \frac{x - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$$

2 **2.a** Tracer le tableau de variations de F sur $[0, 1]$.

2.b Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant c$.

2.c Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et converge vers c.

3 **3.a** Démontrer : $\forall x \in [0, c]$, $0 \leqslant F'(x) \leqslant A$ avec $A = \dfrac{1}{(1 + e^{-c})^2}$.

3.b Démontrer alors : $\forall x \in [0, c[$, $\dfrac{F(c) - F(x)}{c - x} \leqslant A$.

3.c En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant c - u_n \leqslant A^n c$ et retrouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c.

3.d Comment s'appelle cette méthode pour approcher la solution c ?