

TD 1 correction

Logique

Exercice 8

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 1$ (la négation de $\exists n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$)
4. $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, (m \neq n \Rightarrow u_n \neq u_m)$
6. $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow u_n = 0)$

Exercice 9

- (P_1) : La fonction f s'annule (au moins une fois).
 $\text{non}(P_1) : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$
(la fonction prend toujours des valeurs non-nulles)
- (P_2) : La fonction f est croissante.
 $\text{non}(P_2) : \exists x_1 \in \mathbb{R}, \exists x_2 \in \mathbb{R}, (x_1 \leq x_2 \text{ et } f(x_1) > f(x_2))$
(il existe un contre-exemple, de deux éléments $x_1 \leq x_2$ mais leurs images ne sont pas rangées dans le bon sens)
- (P_3) : La fonction f est constante.
 $\text{non}(P_3) : \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y$
(quelque soit la valeur possible pour y , f ne prend pas toujours cette valeur là car elle prend au moins une autre valeur)
- (P_4) : L'équation $f(x) = y$ admet toujours au moins une solution, quelque soit la valeur de y ; graphiquement, toute droite horizontale (avec y fixé) coupe le graphe de f ; ce n'est pas le cas des fonctions $x \mapsto x^2$, ou $x \mapsto e^x$, ou $x \mapsto \sin(x)$, mais c'est le cas de $x \mapsto x^3$ ou d'une fonction affine non-constante. La fonction f est dite *surjective*.
 $\text{non}(P_4) : \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y$
(il y a au moins une valeur y qui n'est jamais prise par f)
- (P_5) : La fonction f est périodique.
 $\text{non}(P_5) : \forall T > 0, \exists x \in \mathbb{R}, f(x+T) \neq f(x)$
(quelque soit la période T possible... il y un x pour lequel la valeur $f(x+T)$ ne retombe pas sur $f(x)$)
- (P_6) : C'est la définition de la continuité, en tout $a \in \mathbb{R}$. Voir le chapitre sur la continuité.
 $\text{non}(P_6) : \exists a \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in \mathbb{R}, (|x-a| < \alpha \text{ et } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon)$