TD 2 correction
Méthodes de démonstration

Exercice 11

La contraposée est : si $x > 0$ alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $x > \varepsilon$. Démontrons-le :

Supposons $x > 0$. Posons par exemple $\varepsilon = \frac{x}{2}$. Alors $\varepsilon > 0$, et $x > \varepsilon$.

Ceci démontre la propriété voulue.

Exercice 12

Démontrons par double inclusion.

- Inclusion $E \supset F$: soit un élément $(x, y, z) \in F$, il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = 5b - a$, $y = 1 + a + b$, $z = 1 + a - b$. On calcule alors

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= (5b - a) - 2(1 + a + b) + 3(1 + a - b) \\ &= 5b - a - 2 - 2a - 2b + 3 + 3a - 3b \\ &= 1 \end{aligned}$$

  ce qui démontre que $(x, y, z) \in E$.

- Inclusion $E \subset F$: soit $(x, y, z) \in E$, on suppose donc $x - 2y + 3z = 1$. Existe-t-il $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} x = 5b - a \\ y = 1 + a + b \\ z = 1 + a - b \end{cases} \quad ?$$

  Ces conditions sont équivalentes à

$$\begin{cases} -a + 5b = x & (L_1) \\ a + b = y - 1 & (L_2) \\ a - b = z - 1 & (L_3) \end{cases}$$

  (on le ré-écrit comme un système d'inconnues $(a, b) \in \mathbb{R}^2$). Les deux première lignes par exemple déterminent d'uniques valeurs pour a et b : avec (L_1) on remplace $a = 5b - x$ dans (L_2) pour obtenir $6b - x = y - 1$ soit $b = \frac{x+y-1}{6}$, puis $a = 5b - x = \frac{-x+5y-1}{6}$. Ces valeurs vérifient-elles alors aussi (L_3) ? C'est le cas si et seulement si

$$\frac{-x + 5y - 1}{6} - \frac{x + y - 1}{6} = z - 1$$

  c'est à dire $-x + 5y - 1 - x - y + 1 = 6z - 6$. Ceci est bien vérifiée par notre hypothèse $x - 2y + 3z = 1$. Cela démontre que $(x, y, z) \in F$.

En conclusion $E = F$.

Exercice 13

Démontrons le résultat par analyse-synthèse.

- Analyse : supposons qu'on ait une telle fonction, c'est à dire qu'on ait $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel qu'en posant $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + 1) - f(x - 1) = x^2$. On développe alors tout, notamment avec

$$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \qquad \text{et} \qquad (x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

  et on trouve que la condition $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + 1) - f(x - 1) = x^2$ est équivalente à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (6a)x^2 + (4b)x + (2a + 2c) = x^2$$

  ce qui est vérifié dès que

$$\begin{cases} 6a = 1 \\ 4b = 0 \\ 2a + 2c = 0 \end{cases}$$

d'où on tire facilement $a = \frac{1}{6}$, $b = 0$, $c = -\frac{1}{6}$ et d quelconque, prenons $d = 0$.

- Synthèse : posons $f : x \mapsto \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x$. C'est bien un polynôme de degré 3 et les calculs précédents montrent bien que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) - f(x-1) = x^2$.

Exercice 14

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2$ et montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } S_n = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} \text{ »}$$

- Initialisation : pour $n = 0$ alors $S_0 = 1$ et le terme de droite donne $\frac{1\times1\times3}{3} = 1$. La propriété est vraie pour $n = 0$.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On alors

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (2(n+1)+1)^2 \\ &= S_n + (2n+3)^2 && \text{(attention)} \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3} + (2n+3)^2 && \text{(en utilisant } \mathcal{P}(n)\text{)} \\ &= \frac{(2n+3)}{3}\Big((n+1)(2n+1) + 3(2n+3)\Big) && \text{(réflexe, factoriser)} \end{aligned}$$

On arrive d'une façon ou d'une autre à montrer que le terme est bien égal à $\frac{(2n+3)}{3}(n+2)(2n+5)$, et c'est bien égal au terme $\frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$ dans lequel on remplace n par $n+1$. Ceci démontre donc bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : par récurrence on a bien démontré $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$.

Exercice 15

Soit $x \in [0, +\infty[$ (fixé, on n'y touche plus). Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } (1+x)^n \geqslant 1 + nx \text{ »}$$

- Initialisation : pour $n = 1$, c'est simplement $1 + x \geqslant 1 + x$, ce qui est évidemment vrai.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$. Multiplions des deux côtés l'inégalité par $1 + x$, qui est bien positif, on obtient

$$(1+x)^{n+1} \geqslant (1+x) \times (1+nx) = 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2$$

Il suffit alors de justifier $1 + (n+1)x + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x$ pour conclure que $(1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x$. Mais c'est bien le cas car $nx^2 \geqslant 0$. Ceci démontre $\mathcal{P}(n+1)$.

En conclusion on a démontré $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 16

Si on fixe le premier nombre α rationnel, c'est effectivement la même chose que de démontrer que si β est irrationnel alors $\alpha + \beta$ est irrationnel. La contraposée de cette dernière assertion est : soit β un réel quelconque, si $\alpha + \beta$ est rationnel alors β est rationnel.

Mais en supposant $\alpha + \beta$ rationnel, il suffit d'écrire $\beta = (\alpha + \beta) - \alpha$, qui est bien rationnel si $\alpha + \beta$ et α le sont (écrire $\alpha + \beta = \frac{p}{q}$ et $\alpha = \frac{u}{v}$ avec $p, q, u, v \in \mathbb{Z}$, $q, v \neq 0$, alors $(\alpha + \beta) - \alpha = \frac{pv - qu}{qv}$).

Ceci démontre donc par contraposée que si β n'est pas rationnel, alors $\alpha + \beta$ ne peut pas l'être.

Exercice 17

L'idée tourne autour de : si on suppose $E \in E$ on doit en déduire $E \notin E$; mais si on suppose $E \notin E$ on doit en déduire $E \in E$. Tout cela est bien paradoxal.

La conclusion de ce célèbre paradoxe est qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles, et aussi qu'on ne peut pas prendre une propriété $\mathcal{P}$ et écrire $\{x \mid \mathcal{P}(x)\}$ mais cet axiome de formation des ensembles s'écrit toujours $\{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$ où E est un ensemble dans lequel sont pris les éléments x. Pour cette raison aussi on évite de mettre des quantificateurs $\forall x$ sans indiquer dans quel ensemble est x ; et le complémentaire d'un ensemble A doit toujours être pris dans un plus gros ensemble E et pas dans « tout ».

Exercice 18

1. $E = \mathbb{N}$ signifie précisément : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.
2. Dans ce cas : $\exists n \in \mathbb{N},\ \text{non}(\mathcal{P}(n))$. Or par définition $\overline{E} = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{non}(\mathcal{P}(n))\}$. Cela signifie donc que $\overline{E}$ est non-vide. Par l'axiome admis au début de l'exercice, $\overline{E}$ admet un plus petit élément qu'on note $m \in \mathbb{N}$ (a priori $m \geqslant 0$, donc). Mais on sait que $\mathcal{P}(0)$ est vraie donc en fait $m \neq 0$, ainsi $m > 0$.
3. $m - 1 \in \mathbb{N}$ est inférieur au plus petit élément pour lequel $\mathcal{P}$ est fausse : c'est donc que $\mathcal{P}(m-1)$ est vraie. Par la propriété d'hérédité de $\mathcal{P}$ on en déduit que $\mathcal{P}(m)$ est aussi vraie.
4. On aboutit au fait que $\mathcal{P}(m)$ est à la fois fausse et vraie : c'est une contradiction. C'est donc que l'hypothèse faite dans la question 2 est fausse, et donc qu'en fait $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.