TD 3 correction
Nombres réels

Exercice 9

- (E_1) : D'abord $\mathcal{D}_{(E_1)} = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. Puis pour $x \in \mathcal{D}_{(E_1)}$:

$$\begin{aligned}(E_1) &\iff \frac{x}{x-2} - \frac{6}{x-1} < 0 \\ &\iff \frac{x(x-1) - 6(x-2)}{(x-1)(x-2)} < 0 \\ &\iff \frac{x^2 - 7x + 12}{(x-1)(x-2)} < 0\end{aligned}$$

  Le numérateur a pour racines 3 et 4. Avec un tableau de signe sans oublier la double barre en 1 et en 2 :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_1)} = \left]1, 2\right[\cup \left]3, 4\right[}$$

- (E_2) : D'abord il faut $x + 3 > 0$ soit $x > -3$, et $x - 1 > 0$ soit $x > 1$. Donc $\mathcal{D}_{(E_2)} =]1, +\infty[$. Puis pour $x \in \mathcal{D}_{(E_2)}$, passant à l'exponentielle :

$$\begin{aligned}(E_2) &\iff x + 3 \leqslant e(x-1) \\ &\iff 0 \geqslant (e-1)x - (e+3) \\ &\iff x \leqslant \frac{e+3}{e-1}\end{aligned}$$

  (on sait au moins $2 < e < 3$ donc $e - 1 > 0$). Quelle est l'intersection de cette condition avec $\mathcal{D}_{(E_3)}$? On voit $e - 1 < e + 3$ donc $1 < \frac{e+3}{e-1}$: il y a bien un intervalle non-vide de solutions. Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_2)} = \left]1, \frac{e+3}{e-1}\right]}$$

- (E_3) : On pose $y = e^x$ maintenant, ou bien après avoir d'abord multiplié par e^x des deux côtés. On trouve

$$(E_3) \iff \begin{cases} e^x = y \\ 2y + 1 = \frac{6}{y} \end{cases}$$

  mais $y > 0$ donc on peut multiplier des deux côtés et se ramener à $2y^2 + y - 6$. Si on avait multiplié par e^x dès le départ, on n'aurait pas cette étape.

  Dans tous les cas on trouve les solutions $y_1 = -2$ et $y_2 = \frac{3}{2}$, or $y > 0$, et à la fin :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_3)} = \left\{\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right\}}$$

- (E_4) : Trois cas à traiter selon la position de x par rapport à 1 et à $\frac{5}{2}$.
  - Cas $x \leqslant 1$: l'équation est $-(x-1) = -(2x-5)$, solution $x = 4$, pas dans l'intervalle.
  - Cas $1 \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}$: l'équation est $x - 1 = -(2x-5)$, solution $x = 2$, bien dans l'intervalle.
  - Cas $\frac{5}{2} \leqslant x$: l'équation est $x - 1 = 2x - 5$, solution $x = 4$, dans l'intervalle.

  Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_4)} = \{2, 4\}}$$

- (E_5) : D'abord $\mathcal{D}_{(E_5)} = \mathbb{R}^*$.
  - Cas $x > 0$: l'équation est $3x = \frac{1}{x}$, solutions $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, donc on garde $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.
  - Cas $x < 0$: l'équation est $-x = \frac{1}{x}$, pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

  Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_5)} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}}$$

- (E_6) Trois cas à traiter selon la position de x par rapport à -2 et à $\frac{1}{3}$.
  - Cas $x \leqslant -2$: l'équation est $-4x - 1 = 4$, solution $x = -\frac{5}{4}$, qui n'est pas dans notre intervalle.
  - Cas $-2 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$: l'équation est $-2x + 3 = 4$, solution $x = -\frac{1}{2}$, qui est bien dans l'intervalle.
  - Cas $\frac{1}{3} \leqslant x$: l'équation est $4x + 1 = 4$, solution $x = -\frac{3}{4}$, qui n'est pas dans l'intervalle.

  Conclusion :
$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_6)} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}}$$
- (E_7) : Directement par équivalences
$$\begin{aligned}(E_7) &\iff 2 \leqslant \sqrt{x^2+1} < 3\\ &\iff 4 \leqslant x^2 + 1 < 9\\ &\iff 3 \leqslant x^2 < 8\end{aligned}$$
  donc (attention)
$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_7)} = \left]-2\sqrt{2}, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, 2\sqrt{2}\right[}$$
- (E_8) : D'abord il faut $2x + 1 \geqslant 0$, donc $\mathcal{D}_{(E_8)} = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. On écrit alors
$$\begin{aligned}(E_8) &\iff \sqrt{2x+1} = 1 - x\\ &\iff 2x + 1 = (1-x)^2 \text{ et } 1 - x \geqslant 0\end{aligned}$$
  La première de ces équations donne alors $x^2 - 4x = 0$, de solutions $x = 0$ (qui vérifie bien la deuxième condition) et $x = 4$ (qui ne la vérifie pas). Donc :
$$\boxed{\mathcal{S}_{(E_8)} = \{0\}}$$

Exercice 10

On trouve $B^2 = 3 + 3 + 2\sqrt{1} = 8$. Or $B \geqslant 0$. Donc $\boxed{B = 2\sqrt{2}}$.

Exercice 11

On a toujours avec la quantité conjuguée, pour tous $1 \leqslant k \leqslant n$:
$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$
donc pour la somme (dite « téléscopique ») on trouve
$$\left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{4} - \sqrt{3}\right) + \cdots + \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \boxed{-1 + \sqrt{n+1}}$$
(tous les autres termes s'annulent).

Exercice 12

- a : $49 \leqslant 57 < 64$ donc $\boxed{\lfloor a \rfloor = 7}$.
- b : $\left(2\sqrt{23}\right)^2 = 92$ et $81 \leqslant 92 < 100$ donc $\boxed{\lfloor b \rfloor = 9}$.
- c : $c^2 = \left(\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}\right)^2 = 5 + 6 + 7 + 2\sqrt{5\times 6} + 2\sqrt{5\times 7} + 2\sqrt{6\times 7}$, or on trouve aussi
  - $\left\lfloor 2\sqrt{5\times 6} \right\rfloor = 10$, donc $10 \leqslant 2\sqrt{5\times 6} < 11$,
  - $\left\lfloor 2\sqrt{5\times 7} \right\rfloor = 11$, donc $11 \leqslant 2\sqrt{5\times 7} < 12$,
  - $\left\lfloor 2\sqrt{6\times 7} \right\rfloor = 12$, donc $12 \leqslant 2\sqrt{6\times 7} < 13$.

Sommant tous les encadrements alors

$$\underbrace{5+6+7+10+11+12}_{51} \leqslant c^2 < \underbrace{5+6+7+11+12+13}_{54}$$

donc $49 \leqslant c^2 < 64$ donc $\boxed{\lfloor c \rfloor = 7}$.