

TD 3 correction

Nombres réels

Exercice 9

- (E₁) : D'abord $\mathcal{D}_{(E_1)} = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. Puis pour $x \in \mathcal{D}_{(E_1)}$:

$$\begin{aligned}(E_1) &\Leftrightarrow \frac{x}{x-2} - \frac{6}{x-1} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x(x-1) - 6(x-2)}{(x-1)(x-2)} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 7x + 12}{(x-1)(x-2)} < 0\end{aligned}$$

Le numérateur a pour racines 3 et 4. Avec un tableau de signe sans oublier la double barre en 1 et en 2 :

$$\mathcal{S}_{(E_1)} =]1, 2[\cup]3, 4[$$

- (E₂) : D'abord il faut $x + 3 > 0$ soit $x > -3$, et $x - 1 > 0$ soit $x > 1$. Donc $\mathcal{D}_{(E_2)} =]1, +\infty[$. Puis pour $x \in \mathcal{D}_{(E_2)}$, passant à l'exponentielle :

$$\begin{aligned}(E_2) &\Leftrightarrow x + 3 \leq e(x - 1) \\ &\Leftrightarrow 0 \geq (e - 1)x - (e + 3) \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{e + 3}{e - 1}\end{aligned}$$

(on sait au moins $2 < e < 3$ donc $e - 1 > 0$). Quelle est l'intersection de cette condition avec $\mathcal{D}_{(E_2)}$? On voit $e - 1 < e + 3$ donc $1 < \frac{e+3}{e-1}$: il y a bien un intervalle non-vidé de solutions. Conclusion :

$$\mathcal{S}_{(E_2)} = \left]1, \frac{e+3}{e-1}\right]$$

- (E₃) : On pose $y = e^x$ maintenant, ou bien après avoir d'abord multiplié par e^x des deux côtés. On trouve

$$(E_3) \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = y \\ 2y + 1 = \frac{6}{y} \end{cases}$$

mais $y > 0$ donc on peut multiplier des deux côtés et se ramener à $2y^2 + y - 6$. Si on avait multiplié par e^x dès le départ, on n'aurait pas cette étape.

Dans tous les cas on trouve les solutions $y_1 = -2$ et $y_2 = \frac{3}{2}$, or $y > 0$, et à la fin :

$$\mathcal{S}_{(E_3)} = \left\{ \ln\left(\frac{3}{2}\right) \right\}$$

- (E₄) : Trois cas à traiter selon la position de x par rapport à 1 et à $\frac{5}{2}$.
 - ▶ Cas $x \leq 1$: l'équation est $-(x - 1) = -(2x - 5)$, solution $x = 4$, pas dans l'intervalle.
 - ▶ Cas $1 \leq x \leq \frac{5}{2}$: l'équation est $x - 1 = -(2x - 5)$, solution $x = 2$, bien dans l'intervalle.
 - ▶ Cas $\frac{5}{2} \leq x$: l'équation est $x - 1 = 2x - 5$, solution $x = 4$, dans l'intervalle.

Conclusion :

$$\mathcal{S}_{(E_4)} = \{2, 4\}$$

- (E₅) : D'abord $\mathcal{D}_{(E_5)} = \mathbb{R}^*$.
 - ▶ Cas $x > 0$: l'équation est $3x = \frac{1}{x}$, solutions $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$, donc on garde $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$.
 - ▶ Cas $x < 0$: l'équation est $-x = \frac{1}{x}$, pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

Conclusion :

$$\mathcal{S}_{(E_5)} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

- (E_6) Trois cas à traiter selon la position de x par rapport à -2 et à $\frac{1}{3}$.
 - ▶ Cas $x \leq -2$: l'équation est $-4x - 1 = 4$, solution $x = -\frac{5}{4}$, qui n'est pas dans notre intervalle.
 - ▶ Cas $-2 \leq x \leq \frac{1}{3}$: l'équation est $-2x + 3 = 4$, solution $x = -\frac{1}{2}$, qui est bien dans l'intervalle.
 - ▶ Cas $\frac{1}{3} \leq x$: l'équation est $4x + 1 = 4$, solution $x = \frac{3}{4}$, qui n'est pas dans l'intervalle.

Conclusion :

$$\mathcal{S}_{(E_6)} = \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

- (E_7) : Directement par équivalences

$$\begin{aligned} (E_7) &\Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{x^2 + 1} < 3 \\ &\Leftrightarrow 4 \leq x^2 + 1 < 9 \\ &\Leftrightarrow 3 \leq x^2 < 8 \end{aligned}$$

donc (attention)

$$\mathcal{S}_{(E_7)} =]-2\sqrt{2}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2\sqrt{2}[$$

- (E_8) : D'abord il faut $2x + 1 \geq 0$, donc $\mathcal{D}_{(E_8)} = [-\frac{1}{2}, +\infty[$. On écrit alors

$$\begin{aligned} (E_8) &\Leftrightarrow \sqrt{2x + 1} = 1 - x \\ &\Leftrightarrow 2x + 1 = (1 - x)^2 \text{ et } 1 - x \geq 0 \end{aligned}$$

La première de ces équations donne alors $x^2 - 4x = 0$, de solutions $x = 0$ (qui vérifie bien la deuxième condition) et $x = 4$ (qui ne la vérifie pas). Donc :

$$\mathcal{S}_{(E_8)} = \{0\}$$

Exercice 10

On trouve $B^2 = 3 + 3 + 2\sqrt{1} = 8$. Or $B \geq 0$. Donc $B = 2\sqrt{2}$.

Exercice 11

On a toujours avec la quantité conjuguée, pour tous $1 \leq k \leq n$:

$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

donc pour la somme (dite « télescopique ») on trouve

$$\left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{4} - \sqrt{3}\right) + \dots + \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = -1 + \sqrt{n+1}$$

(tous les autres termes s'annulent).

Exercice 12

- a : $49 \leq 57 < 64$ donc $a = 7$.
- b : $(2\sqrt{23})^2 = 92$ et $81 \leq 92 < 100$ donc $b = 9$.
- c : $c^2 = (\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 5 + 6 + 7 + 2\sqrt{5 \times 6} + 2\sqrt{5 \times 7} + 2\sqrt{6 \times 7}$, or on trouve aussi
 - ▶ $\lfloor 2\sqrt{5 \times 6} \rfloor = 10$, donc $10 \leq 2\sqrt{5 \times 6} < 11$,
 - ▶ $\lfloor 2\sqrt{5 \times 7} \rfloor = 11$, donc $11 \leq 2\sqrt{5 \times 7} < 12$,
 - ▶ $\lfloor 2\sqrt{6 \times 7} \rfloor = 12$, donc $12 \leq 2\sqrt{6 \times 7} < 13$.

Sommant tous les encadrements alors

$$\underbrace{5 + 6 + 7 + 10 + 11 + 12}_{51} \leq c^2 < \underbrace{5 + 6 + 7 + 11 + 12 + 13}_{54}$$

donc $49 \leq c^2 < 64$ donc $c = 7$.