

TD 4 correction

Trigonométrie

Exercice 12

1. $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$, d'où

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}$$

2. $2 \times \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$, on applique donc deux fois la méthode « utiliser la formule de duplication pour diviser » en ayant d'abord déterminé les $\frac{\pi}{8}$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{16}\right) = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

cette dernière pouvant se simplifier jusqu'à $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} - 1 - \sqrt{2}$, toujours en utilisant les méthodes de quantités conjuguées des racines.

3. $2 \times \frac{5\pi}{8} = \frac{5\pi}{4}$ mais attention en extrayant des racines carrées car $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) < 0$ alors que $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) > 0$:

$$\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -1 - \sqrt{2}$$

Pour cette dernière, selon la méthode utilisée, on trouve d'abord $-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$, qu'on peut arriver à simplifier en multipliant sous la racine par $2 + \sqrt{2}$ en haut et en bas.

Exercice 14

On trouve : $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\sin^4(\theta) = \frac{1}{8} \cos(4\theta) - \frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{3}{8}$$

$$\cos^4(\theta) = \frac{1}{8} \cos(4\theta) + \frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{3}{8}$$

$$\sin^2(\theta) \cos^2(3\theta) = -\frac{1}{8} \cos(8\theta) + \frac{1}{4} \cos(6\theta) - \frac{1}{8} \cos(4\theta) - \frac{1}{4} \cos(2\theta) + \frac{1}{4}$$