

TD 5 correction

Nombres complexes

Exercice 12

1. On trouve

$$\begin{aligned}(2+i)^2 &= 3+3i \\ (2+i)^3 &= 2+11i \\ (2+i)^4 &= -7+24i\end{aligned}$$

et on remplace : $P(2+i) = 0$.

2. Idem, ou bien c'est automatique à cause des propriétés algébriques de la conjugaison :

$$P(2-i) = \overline{P(2+i)} = 0$$

3. D'une part on développe $(z - (2+i))(z - (2-i)) = z^2 - 4z + 5$. Puis c'est une analyse-synthèse classique. On trouve :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad P(z) = (z^2 + 2z - 1) \times (z^2 - 4z + 5)$$

4. Alors $P(z) = 0$ si et seulement si $z^2 - 4z + 5 = 0$ (dont les solutions sont déjà $2+i$ et $2-i$) ou $z^2 + 2z - 1 = 0$. Pour cette dernière on trouve $z = -1 \pm \sqrt{2}$.

Conclusion : une équation de degré 4 avec 4 solutions.

$$\mathcal{S} = \left\{ -1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}, 2+i, 2-i \right\}$$

Exercice 13

• (E₁) : On élève au carré des deux côtés puis on pose $z = x + iy$, on trouve

$$x^2 + (y-1)^2 = (x+1)^2 + y^2$$

qui se simplifie en $-y = x$.

$$\mathcal{S}_{(E_1)} = \left\{ z = x - ix \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

Géométriquement : les points à égale distance de i et de -1 forment une droite, la deuxième diagonale.

• (E₂) : Par équivalences

$$(E_2) \iff z(z^2 - 2z + 9) = 0 \iff z = 0 \text{ ou } z^2 - 2z + 9 = 0$$

Pour cette deuxième équation $\Delta = -32$ et les solutions sont $z = 1 \pm 2i\sqrt{2}$. Donc :

$$\mathcal{S}_{(E_2)} = \left\{ 0, 1 - 2i\sqrt{2}, 1 + 2i\sqrt{2} \right\}$$

• (E₃) : On peut chercher les solutions sous forme algébrique, mais la forme exponentielle est aussi bien adaptée. D'une part $z = 0$ est solution. D'autre part si on cherche une solution sous forme $z = re^{i\theta}$ ($r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$), alors z est solution si et seulement si

$$r^2 e^{2i\theta} = r e^{-i\theta}$$

c'est à dire

$$r^2 = r \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad 2\theta = -\theta + 2k\pi$$

On trouve donc $r = 1$ et $\theta = 2k\pi/3$, les solutions uniques étant prises avec $\theta \in [0, 2\pi[$ donc avec $k = 0, 1, 2$; pour $k = 0$ c'est $z = 1$. En résumé :

$$\mathcal{S}_{(E_3)} = \left\{ 0, 1, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3} \right\}$$

- (E₄) : On pose $Z = z^2$. Alors

$$(E_4) \iff Z^2 - 4Z + 5 = 0$$

On trouve deux solutions $Z_1 = -1$ et $Z_2 = 5$. Puis il faut résoudre $z^2 = -1$ et $z^2 = 5$. Donc

$$\mathcal{S}_{(E_4)} = \left\{ i, -i, \sqrt{5}, -\sqrt{5} \right\}$$

- (E₅) : D'abord

$$(E_5) \iff z(z^6 - 1) = 0 \iff z = 0 \text{ ou } z^6 = 1$$

Pour cette dernière les solutions sont les *racines sixièmes de l'unité*. Rappelons le raisonnement : $z = 0$ n'est pas solution, et si z est solution alors $|z|^6 = 1$ donc $|z| = 1$; on cherche alors les solutions sous forme $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$, qui est solution si et seulement si

$$z^6 = 1 \iff e^{6i\theta} = 1 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, 6\theta = 2k\pi$$

Les solutions uniques avec $\theta \in [0, 2\pi[$ sont donc tous les $e^{i\theta}$ avec $\theta = \frac{2k\pi}{6}$ pour $0 \leq \theta \leq 5$. En résumé :

$$\mathcal{S} = \left\{ 0, 1, e^{i\pi/3}, e^{2i\pi/3}, -1, e^{4i\pi/3}, e^{5i\pi/3} \right\}$$

- (E₆) : D'abord $\mathcal{D}_{(E_6)} = \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{3}{5} \right\}$. On pose $z = x + iy$ plus ou moins tard et on exprime $\frac{z+4i}{5z-3}$ sous forme algébrique, en multipliant par le conjugué de $5z - 3 = (5x - 3) + 5yi$:

$$\frac{z + 4i}{5z - 3} = \frac{(x(5x - 3) + 5y(y + 4)) + i(-5xy + (y + 4)(5x - 3))}{|5z - 3|^2}$$

La condition $\Im\left(\frac{z+4i}{5z-3}\right) = 0$ est alors équivalente à $-5xy + (y + 4)(5x - 3) = 0$ soit $20x - 3y - 12 = 0$. Ceci est une équation de droite, on peut par exemple prendre x quelconque puis $y = \frac{20}{3}x - 4$.

$$\mathcal{S}_{(E_6)} = \left\{ z = x + i\left(\frac{20}{3}x - 4\right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 14

On rappelle le développement, apparu lors de la démonstration de l'inégalité triangulaire :

$$|z + w|^2 = (z + w) \times \overline{(z + w)} = (z + w) \times (\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w}$$

avec

$$z\bar{w} + \bar{z}w = z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} = 2\Re(z\bar{w})$$

On trouve alors les deux identités suivantes :

$$|z + w|^2 = |z|^2 + 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2$$

$$|z - w|^2 = |z|^2 - 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2$$

et il suffit de sommer les deux lignes pour obtenir

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

Géométriquement : si z représente un vecteur $\vec{u}$ et w représente un vecteur $\vec{v}$ alors ces deux vecteurs délimitent un parallélogramme, la somme des longueurs au carré des côtés est $2(|z|^2 + |w|^2)$. Les deux diagonales du parallélogramme sont les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$, ainsi $|z + w|^2$ et $|z - w|^2$ sont les carrés des longueurs des diagonales.

La somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés !

Exercice 15

On démontre dans l'ordre (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii) et (iii) $\Rightarrow$ (i).

- (i) $\Rightarrow$ (ii) : Supposons qu'on ait $(M, N) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall z \in A$,

$$|\Re(z)| \leq M \quad \text{et} \quad |\Im(z)| \leq N$$

Écrivant $z = a + bi$ ($(a, b) \in \mathbb{R}^2$) alors

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \leq M^2 + N^2$$

donc $|z| \leq \sqrt{M^2 + N^2}$. Ceci démontre (ii) avec $R = \sqrt{M^2 + N^2}$.

- (ii) $\Rightarrow$ (iii) : Supposons qu'on ait $R \in \mathbb{R}$ tel que $\forall z \in A, |z| \leq R$. Écrivant $z = a + bi$, on a

$$a^2 \leq a^2 + b^2 \quad \text{et} \quad b^2 \leq a^2 + b^2$$

d'où on déduit à la fois

$$|a| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq R \quad \text{et} \quad |b| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq R$$

Ceci vérifie (iii) en posant $P = R$.

- (iii) $\Rightarrow$ (i) : immédiat en prenant $M = N = P$.

En résumé : la partie A est bornée en module si et seulement si elle est bornée à la fois en parties réelles et en parties imaginaires, et dans ce dernier cas on peut même prendre la même borne pour les deux.

Géométriquement : la partie A peut être incluse dans un cercle, si et seulement si elle peut être incluse dans un carré, si et seulement si elle peut être incluse dans un rectangle, tous de centre 0 — toujours sous-entendu : quitte à prendre ces parties assez grandes pour inclure A (par exemple, un carré peut toujours être inclus dans un cercle plus grand ; et en même temps, un cercle peut aussi être inclus dans un carré plus grand). Si A n'est pas bornée, alors ses éléments partent à l'infini et on ne peut pas l'inclure dans une telle partie.