TD 6 correction
Suites

Exercice 13

1. En comptant en nombre de millions d'habitants, et en comptant les années à partir de 2026 :

```python
def exo2_suite(n):
    # u représente u(i), population en 2026+i
    u = 12
    for i in range(n):
        u = 1.0105 * u + 0.08
    return u
```

et pour la liste :

```python
def exo2_liste(n):
    L = [0] * n
    L[0] = 12
    for i in range(1, n):
        L[i] = 1.0105 * L[i-1] + 0.08
    return L
```

2. Par exemple pour la première :

```python
def exo4_1_suite(n):
    # u représente u(i) et v représente u(i+1)
    u = 1
    v = 8
    for i in range(n):
        t = 4 * v - 4 * u
        u = v
        v = t
    return u
```

et

```python
def exo4_1_liste(n):
    L = [0] * n
    L[0] = 1
    L[1] = 8
    for i in range(2, n):
        L[i] = 4 * L[i-1] - 4 * L[i-2]
    return L
```

3. On utilise une boucle avec deux variables `a` et `b` pour représenter chacune des deux suites. Dans la boucle on souhaite faire simultanément les opérations

$$\begin{cases} a \leftarrow 4a - b \\ b \leftarrow 2a - b \end{cases}$$

ce qui nécessite de passer par des variables intermédiaires (même problème que pour l'échange de deux variables et que pour les suites d'ordre 2) !

```python
def exo9_suite(n):
    # a représente a(i) et b représente b(i)
    a = 1
    b = 0
    for i in range(n):
        # calcul des termes suivants
        aa = 4 * a - b
        bb = 2 * a - b
        # a devient a(i+1) et b devient b(i+1)
        a = aa
        b = bb
    return (a, b)
```

Pour la liste, avec le style utilisé jusque là : au départ `L` est une liste de couples $(0,0)$, qu'on remplit au fur et à mesure.

```python
def exo9_liste(n):
    L = [(0, 0)] * n
    L[0] = (1, 0)
    for i in range(1, n):
        (a, b) = L[i-1]
        L[i] = (4 * a - b, 2 * a - b)
    return L
```

Il est tout aussi élégant d'utiliser `append` :

```python
def exo9_liste_2(n):
    L = [(1, 0)]
    for i in range(1, n):
        (a, b) = L[i-1]
        L.append((4 * a - b, 2 * a - b))
    return L
```

Exercice 14

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: (C) : $q^2+4q-1=0$, cas $\Delta>0$, de racines $q_1=-2+\sqrt{5}$ et $q_2=-2-\sqrt{5}$. Donc : il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=A\left(-2+\sqrt{5}\right)^n+B\left(-2-\sqrt{5}\right)^n$$

On trouve ensuite $A=B=-1/2$. Donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=-\frac{1}{2}\left(\left(-2+\sqrt{5}\right)^n+\left(-2-\sqrt{5}\right)^n\right)}$$

- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$: (C) : $q^2-6q+9=0$, cas $\Delta=0$, de racine double $q=3$. Donc : il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n=(A+Bn)3^n$$

On trouve ensuite $A=2$ puis $B=-1$. Donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n=(2-n)3^n}$$

- $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$: (C) : $q^2+4q+8=0$, cas $\Delta<0$, de racines $q=-2\pm 2i$. Prenons $q=-2+2i$ (l'autre racine est $\overline{q}$) que nous devons mettre sous forme exponentielle $q=2\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$. Donc : il existe $(C,D)\in\mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad w_n=\left(2\sqrt{2}\right)^n\left(C\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)+D\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right)$$

On trouve ensuite $C=0$ et $D=1$. Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad w_n = \left(2\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}$$

Exercice 15

On pose $u_n = \dfrac{1}{2\sqrt{7}}\left(\left(3+\sqrt{7}\right)^n - \left(3-\sqrt{7}\right)^n\right)$ et on reconnait typiquement un nombre qui vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, de la forme $Aq_1^n + Bq_2^n$ avec

$$q_1 = 3+\sqrt{7}, \qquad q_2 = 3-\sqrt{7}, \qquad A = \frac{1}{2\sqrt{7}}, \qquad B = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$$

L'équation caractéristique est $(q-q_1)(q-q_2)=0$ qui donne en développant $q^2-6q+2=0$. On calcule de plus $u_0=0$ et $u_1=1$.

Donc : u_n est le terme général de l'unique suite vérifiant

$$\boxed{u_0 = 0, \qquad u_1 = 1, \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 6u_{n+1} + 2u_n = 0}$$

On démontre alors par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$ (en ne faisant plus du tout référence à la formule donnée, mais seulement à ce qui est encadré ci-dessus) que u_n est entier. C'est immédiat :

- Initialisation : u_0 et u_1 sont entiers.
- Hérédité : pour $n \in \mathbb{N}$, si on suppose que u_n et u_{n+1} sont entiers, alors $6u_{n+1} - 2u_n$ est encore entier donc u_{n+2} est entier.

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est un nombre entier}}$.

Exercice 16

D'abord on montre par récurrence double : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0}$. C'est immédiat :

- Initialisation : $u_0 = 2 > 0$ et $u_1 = 4 > 0$.
- Hérédité : si pour $n \in \mathbb{N}$ on suppose $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$ alors le quotient définissant u_{n+2} est bien défini et est encore strictement positif.

On peut alors poser $v_n = \ln(u_n)$ qui vérifie :

$$\boxed{v_0 = \ln(2), \qquad v_1 = 2\ln(2), \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 4v_{n+1} - 3v_n}$$

On trouve par suite (méthode standard) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = \frac{\ln(2)}{2}(1+3^n)}$$

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{v_n}$. Cela se simplifie en :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = 2^{(1+3^n)/2}}$$

On peut vérifier au passage que le nombre $1+3^n$ est toujours un entier pair (arithmétique modulo 2), et donc u_n est toujours bien une puissance de 2 avec un exposant entier, il n'y a pas de $2^{1/2}$ qui serait égal à $\sqrt{2}$ qui apparait.