TD 7 correction
Sommes et produits

Exercice 13

- A_n : On sépare les indices pairs et impairs.

$$A_n = \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n+1\\ \text{pair}}} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor^2 + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n+1\\ \text{impair}}} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor^2$$

À gauche : on pose $k = 2j$, le plus petit k est 0 pour $j = 0$, le plus grand k est $2n$ pour $j = n$.

À droite : on pose $k = 2j + 1$, le plus petit k est 1 pour $j = 0$, le plus grand k est $2n + 1$ pour $j = n$.

Donc :

$$A_n = \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor \frac{2j}{2} \right\rfloor^2 + \sum_{j=0}^{n} \left\lfloor \frac{2j+1}{2} \right\rfloor^2 = \sum_{j=0}^{n} j^2 + \sum_{j=0}^{n} j^2$$

Calcul (c'est deux fois la même somme) :

$$\boxed{A_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}}$$

- B_n : D'abord

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+3}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \big(\ln(k+3) - \ln(k)\big)$$

Calcul au brouillon : c'est une somme téléscopique d'ordre 3 (le $\ln(k+3)$ d'un terme se simplifie avec le $-\ln(k)$ de trois termes plus loin).

Rédaction au propre en posant le changement d'indice $j = k + 3$:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+3) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) = \sum_{j=4}^{n+3} \ln(j) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$$

puis en faisant apparaitre tous les termes en commun à simplifier, ceux d'indice entre 4 et n :

$$B_n = \left(\sum_{j=4}^{n} \ln(j) + \ln(n+1) + \ln(n+2) + \ln(n+3)\right) - \left(\ln(1) + \ln(2) + \ln(3) + \sum_{k=4}^{n} \ln(k)\right)$$

Il reste alors :

$$\boxed{B_n} = \ln(n+1) + \ln(n+2) + \ln(n+3) - \ln(1) - \ln(2) - \ln(3) = \boxed{\ln\left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}\right)}$$