TD 8 correction
Applications

Exercice 7

1. D'abord le domaine de définition : $\boxed{\mathcal{D}_{\text{th}} = \mathbb{R}}$, en effet au dénominateur $e^{2x} + 1 > 0$.

   On dérive : $\forall x \in \mathbb{R}$,

   $$\boxed{\text{th}'(x)} = \frac{2e^{2x} \times (e^{2x}+1) - (e^{2x}-1) \times 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \boxed{\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} > 0}$$

   donc la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a aussi besoin des limites : en $+\infty$,

   $$\text{th}(x) = \frac{e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$

   En $-\infty$ par contre on trouve directement (sans forme indeterminée) $\lim_{x \to -\infty} \text{th}(x) = -1$.

   On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\text{th}'(x)$		$+$		$+$	
$\text{th}(x)$	-1	↗	0	↗	1

   Par le théorème de la bijection (la fonction est bien strictement croissante, et continue) on en déduit que $\boxed{\text{th réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ vers }]-1,1[}$.

2. Soit $y \in]-1,1[$. Tentons de résoudre l'équation $\text{th}(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

   $$\text{th}(x) = y \iff e^{2x} - 1 = (e^{2x}+1)y \iff e^{2x} - 1 = ye^{2x} + y \iff e^{2x}(1-y) = 1 + y \iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y}$$

   On trouvera alors bien une unique solution $x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$…

   … À condition de vérifier que le terme sous le ln est bien strictement positif. Or avec un petit tableau de signes :

y	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+y$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-y$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{1+y}{1-y}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

   C'est bien le cas si et seulement si $-1 < y < 1$, ce qui redémontre au passage (mais sans utiliser de tableau de variations !) que l'image de la fonction th est bien $]-1,1[$.

   Conclusion : l'application réciproque de th est la fonction *argument tangente hyperbolique*

   $$\boxed{\begin{aligned} \text{th}^{-1} = \text{Argth} :]-1,1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \end{aligned}}$$

Exercice 8

On écrit toujours notre polynôme $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$, ce qui permet de calculer aussi $P' : x \mapsto 2ax + b$, et on utilise la méthode « tout en même temps ». Mais on commence par ré-écrire proprement la question à chaque fois.

- φ_1 : Soit $(u,v)\in\mathbb{R}^2$. Existe-t-il $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que
$$\begin{cases} a+b+c=u \\ 4a+2b+c=v \end{cases} \quad ?$$
Ce système est équivalent à
$$\underset{L_2\leftarrow L_2-4L_1}{\iff} \begin{cases} a+b+c=u \\ -2b-3c=-4u+v \end{cases}$$
Une solution existe toujours : on peut prendre c quelconque, qui détermine ensuite b puis a.
Conclusion : φ_1 est surjective (une solution existe toujours) mais n'est pas injective (il y a plusieurs solutions, en faisant varier c). La donnée de deux points de passage aux abscisses 1 et 2 détermine au moins un polynôme de degré 2, et en fait une infinité.
- φ_2 : Soit $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$. Existe-t-il $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que
$$\begin{cases} a+b+c=u \\ 4a+2b+c=v \\ 9a+3b+c=w \end{cases} \quad ?$$
Ce système est équivalent à
$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-4L_1\\ L_3\leftarrow L_3-9L_1}}{\iff} \begin{cases} a+b+c=u \\ -2b-3c=-4u+v \\ -6b-8c=-9u+w \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-3L_2}{\iff} \begin{cases} a+b+c=u \\ -2b-3c=-4u+v \\ c=3u-3v+w \end{cases}$$
Il y a toujours une unique solution : L_3 détermine un unique c, qu'on reporte dans L_2 ce qui détermine b, qu'on reporte dans L_1 ce qui détermine a.
Conclusion : φ_2 est bijective. La donnée de trois points de passage aux abscisses 1, 2 et 3 détermine un et un seul polynôme de degré 2.
- φ_3 : Soit $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$. Existe-t-il $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que
$$\begin{cases} a+b+c=u \\ 2a+b=v \\ 4a+2b+c=w \end{cases} \quad ?$$
Ce système est équivalent à
$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-4L_1}}{\iff} \begin{cases} a+b+c=u \\ -b-2c=-2u+v \\ -2b-3c=-3u+w \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\iff} \begin{cases} a+b+c=u \\ -b-2c=-2u+v \\ c=u-2v+w \end{cases}$$
Là encore, on voit qu'il y a une unique solution : L_3 détermine un unique c, puis L_2 détermine b puis L_1 détermine a.
Conclusion : φ_3 est bijective. La donnée d'un point de passage à l'abscisse 1, ainsi que d'une tangente en ce point, et d'un point de passage à l'abscisse 2, détermine un et un seul polynôme de degré 2.
- φ_4 : Soit $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$. Existe-t-il $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que
$$\begin{cases} a+b+c=u \\ 4a+b=v \\ 9a+3b+c=w \end{cases} \quad ?$$
$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-4L_1\\ L_3\leftarrow L_3-9L_1}}{\iff} \begin{cases} a+b+c=u \\ -3b-4c=-4u+v \\ -6b-8c=-9u+w \end{cases}$$
Ce n'est pas tout à fait pareil, car les équations de L_3 sont le double de celles de L_2. Si on n'a *pas*
$$2\times(-4u+v)=-9u+w$$

alors L_2 et L_3 donnent deux valeurs différentes pour la quantité $-3b-4c$, ce qui est absurde ! Le choix $(u,v,w)=(0,0,1)$ par exemple n'admet pas d'antécédent, et donc φ_4 n'est pas surjective.

Mais si cette condition est bien vérifiée, alors les lignes L_2 et L_3 sont en fait les mêmes et le système est équivalent à

$$\begin{cases} a+b+c=u \\ -3b-4c=-4u+v \end{cases}$$

On voit qu'on peut choisir c quelconque, puis L_2 détermine b puis L_1 détermine a. Comme il y a plusieurs choix possibles pour c, alors (u,v,w) admet plusieurs antécédents, donc φ_4 n'est pas injective.

En résumé : étant donnés des points de passage aux abscisses 1 et 3, et une dérivée en 2, on ne peut pas toujours trouver un polynôme de degré 2 passant par là ; et si on en trouve un alors on peut en trouver plusieurs, en fait une infinité.

Exercice 9

1. Montrons $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$:
   - Inclusion $\subset$: Soit $y\in f(A\cup B)$. Il existe $x\in A\cup B$ tel que $y=f(x)$.
     - Si $x\in A$, alors $y\in f(A)$;
     - Et si $x\in B$ alors $y\in f(B)$.

     Donc dans tous les cas $y\in f(A)\cup f(B)$.
   - Inclusion $\supset$: Soit $y\in f(A)\cup f(B)$.
     - Si $y\in f(A)$, il existe $x_1\in A$ tel que $y=f(x_1)$. Et alors $x_1\in A\cup B$, et donc $y\in f(A\cup B)$;
     - Et si $y\in f(B)$, alors il existe $x_2\in B$ tel que $y=f(x_2)$, et donc $x_2\in A\cup B$ donc $y\in f(A\cup B)$ aussi.

     Dans tous les cas $y\in f(A\cup B)$.
2. - Montrons qu'on a toujours $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$:

     Soit $y\in f(A\cap B)$. Il existe $x\in A\cap B$ tel que $f(x)=y$.
     - D'une part $x\in A$, donc $y\in f(A)$;
     - Et d'autre part $x\in B$, donc $y\in f(B)$.

     Donc $y\in f(A)\cap f(B)$.
   - Dans l'autre sens, on n'y arrive pas… essayons de démontrer $f(A\cap B)\supset f(A)\cap f(B)$. Soit $y\in f(A)\cap f(B)$.
     - D'une part $y\in f(A)$, donc il existe $x_1\in A$ tel que $y=f(x_1)$.
     - D'autre part $y\in f(B)$, donc il existe $x_2\in B$ tel que $y=f(x_2)$.

     Sans hypothèse supplémentaire on ne peut pas montrer que $x_1=x_2$ et donc que y est bien l'image par f d'un élément de $A\cap B$. On peut même très bien avoir $A\cap B=\emptyset$ mais avec A, B ayant même image par f, auquel cas $f(A\cap B)=\emptyset$ mais $f(A)=f(B)$ est non vide.
   - Ceci nous permet d'envisager un contre-exemple bien concret. Prenons par exemple $f:x\mapsto x^2$ avec $A=]-\infty,0]$ et $B=[0,+\infty[$. Alors

     $$f(A\cap B)=f(\{0\})=\{0\} \qquad \text{et} \qquad f(A)=f(B)=[0,+\infty[$$

     donc $f(A)\cap f(B)=[0,+\infty[$:

     $$f(A)\cap f(B)\neq f(A)\cap f(B)$$
3. Supposons f injective, montrons qu'alors on a bien $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

   Il suffit de reprendre la démonstration ci-dessus dans le paragraphe $f(A\cap B)\supset f(A)\cap f(B)$: pour un élément $y\in f(A)\cap f(B)$, il existe $x_1\in A$ tel que $y=f(x_1)$, et il existe $x_2\in B$ tel que $y=f(x_2)$. Par injectivité de f on déduit $x_1=x_2$ donc ceci est un élément de $A\cap B$, et donc $y\in f(A\cap B)$.
4. Démontrons la réciproque : si $f(A\cap B)\supset f(A)\cap f(B)$ est vraie pour toutes parties A, B de E alors f est injective.

Soient $x_1, x_2 \in E$, supposons $f(x_1) = f(x_2)$. Appliquons l'hypothèse à $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$, dont on déduit que $f(A) \cap f(B)$ est un ensemble à un seul élément inclus dans $f(A \cap B)$, et donc que $f(A \cap B)$ ne peut pas être vide. Donc $A \cap B$ non plus ne peut pas être vide et donc cela signifie que $\boxed{x_1 = x_2}$.