

# TD 8 correction

## Applications

**Exercice 8.** 1. D'abord le domaine de définition  $\mathcal{D}_{\text{th}} = \mathbb{R}$ , en effet au dénominateur  $e^{2x} + 1 > 0$ .

On dérive :

$$\text{th}'(x) = \frac{2e^{2x} \times (e^{2x} + 1) - (e^{2x} - 1) \times 2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} > 0 \quad (1)$$

donc la fonction est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . On a aussi besoin des limites : en  $+\infty$ ,

$$\text{th}(x) = \frac{e^{2x} \left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{2x} \left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \quad (2)$$

En  $-\infty$  par contre on trouve directement  $\text{th}(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$ .

On a donc le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\text{th}'(x)$		$+$	
$\text{th}(x)$	$-1$	$0$	$1$

(3)

Par le théorème de la bijection (la fonction est bien strictement croissante, et continue) on en déduit que th réalise une  $\boxed{\text{bijection de } \mathbb{R} \text{ vers } ]-1, 1[}$ .

2. Soit  $y \in ]-1, 1[$ , soit  $x \in \mathbb{R}$ . Résolvons l'équation :

$$\begin{aligned} \text{th}(x) = y &\iff e^{2x} - 1 = (e^{2x} + 1)y \iff e^{2x} - 1 = ye^{2x} + y \\ &\iff e^{2x}(1 - y) = 1 + y \iff e^{2x} = \frac{1 + y}{1 - y} \end{aligned} \quad (4)$$

On aura alors  $2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$  puis  $\boxed{x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}$  ...

... À condition de vérifier que le terme sous le ln est bien strictement positif. Or

avec un petit tableau de signes

$y$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$1 + y$	$-$	$0$	$+$	$+$
$1 - y$	$+$	$0$	$+$	$-$
$\frac{1+y}{1-y}$	$-$	$0$	$+$	$-$

(5)

C'est bien le cas si et seulement si  $-1 < y < 1$ , ce qui redémontre au passage (mais sans utiliser de tableau de variations !) que l'image de la fonction th est bien  $]-1, 1[$ . Conclusion : l'application réciproque de th est la fonction *argument tangente hyperbolique*

$$\boxed{\text{th}^{-1} = \text{Argth} : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}} \quad (6)$$

$$y \mapsto \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

**Exercice 9.** On écrit toujours notre polynôme  $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ , ce qui permet de calculer aussi  $P'(x) = 2ax + b$ , et on utilise la méthode « tout en même temps ». Et on commence par ré-écrire proprement la question à chaque fois.

•  $\varphi_1$  Soit  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , existe-t-il  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tels que

$$\begin{cases} a + b + c = u & ? \\ 4a + 2b + c = v \end{cases} \quad (7)$$

Ce système est équivalent à  $(L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1)$

$$\boxed{\begin{cases} a + b + c = u \\ -2b - 3c = v - 4u \end{cases}} \quad (8)$$

Une solution existe toujours, on peut prendre  $c$  quelconque, qui détermine ensuite  $b$  puis  $a$ .

Conclusion :  $\boxed{\varphi_1 \text{ est surjective}}$  (une solution existe toujours) mais n'est  $\boxed{\text{pas injective}}$  (il y a plusieurs solutions, en faisant varier  $c$ ). La donnée de deux points de passage aux abscisses 1 et 2 détermine au moins un polynôme de degré 2, et en fait une infinité.

•  $\varphi_2$  Soit  $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ , existe-t-il  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tels que

$$\begin{cases} a + b + c = u & ? \\ 4a + 2b + c = v \\ 9a + 3b + c = w \end{cases} \quad (9)$$

Ce système est équivalent à  $(L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1)$

$$\begin{cases} a + b + c = u \\ -2b - 3c = v - 4u \\ -6b - 8c = w - 9u \end{cases} \quad (10)$$

puis à  $(L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2)$

$$\boxed{\begin{cases} a + b + c = u \\ -2b - 3c = v - 4u \\ c = (w - 9u) - 3(v - 4u) \end{cases}} \quad (11)$$

Il y a toujours une unique solution :  $L_3$  détermine un unique  $c$ , qu'on reporte dans  $L_2$  ce qui détermine  $b$ , qu'on reporte dans  $L_1$  ce qui détermine  $a$ .

Conclusion :  $\varphi_2$  est bijective. La donnée de trois points de passage aux abscisses 1, 2 et 3 détermine un et un seul polynôme de degré 2.

- $\varphi_3$  Soit  $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ , existe-t-il  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tels que

$$\begin{cases} a + b + c = u \\ 2a + b = v \\ 4a + 2b + c = w \end{cases} \quad ? \quad (12)$$

Ce système est équivalent à  $(L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1)$

$$\begin{cases} a + b + c = u \\ -b - 2c = v - 2u \\ -2b - 3c = w - 3u \end{cases} \quad (13)$$

puis à  $(L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2)$

$$\boxed{\begin{cases} a + b + c = u \\ -b - 2c = v - 2u \\ c = (w - 3u) - 2(v - 2u) \end{cases}} \quad (14)$$

Là encore, on voit qu'il y a une unique solution :  $L_3$  détermine un unique  $c$ , puis  $L_2$  détermine  $b$  puis  $L_1$  détermine  $a$ .

Conclusion :  $\varphi_3$  est bijective. La donnée d'un point de passage à l'abscisse 1, ainsi que d'une tangente en ce point, et d'un point de passage à l'abscisse 2, détermine un et un seul polynôme de degré 2.

- $\varphi_4$  Soit  $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ , existe-t-il  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tels que

$$\begin{cases} a + b + c = u \\ 4a + b = v \\ 9a + 3b + c = w \end{cases} \quad ? \quad (15)$$

Ce système est équivalent à  $(L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1)$

$$\boxed{\begin{cases} a + b + c = u \\ -3b - 4c = v - 4u \\ -6b - 8c = w - 9u \end{cases}} \quad (16)$$

Ce n'est pas tout à fait pareil, car les équations de  $L_3$  sont le double de celles de  $L_2$ . Si on n'a pas

$$2 \times (v - 4u) = w - 9u \quad (17)$$

alors  $L_2$  et  $L_3$  donnent deux valeurs différentes pour la quantité  $-3b - 4c$ , ce qui est absurde! Le choix  $(u, v, w) = (0, 0, 1)$  par exemple n'admet pas d'antécédent, et donc  $\varphi_4$  n'est pas surjective.

Mais si cette condition est bien vérifiée, alors les lignes  $L_2$  et  $L_3$  sont en fait les mêmes et le système est équivalent à

$$\begin{cases} a + b + c = u \\ -3b - 4c = v - 4u \end{cases} \quad (18)$$

On voit qu'on peut choisir  $c$  quelconque, puis  $L_2$  détermine  $b$  puis  $L_1$  détermine  $a$ . Comme il y a plusieurs choix possibles pour  $c$ , alors  $(u, v, w)$  admet plusieurs antécédents, donc  $\varphi_4$  n'est pas injective.

Conclusion :  $\varphi_4$  n'est ni surjective, ni injective. Étant donné des points de passage aux abscisses 1 et 3, et une dérivée en 2, on ne peut pas toujours trouver un polynôme de degré 2 passant là, et si on en trouve un alors on peut en trouver plusieurs, en fait une infinité.

Un cas concret : prenons  $u = w = 0$ , alors les polynômes de degré 2 s'annulant en 1 et en 3 forment une parabole dont le sommet est en 2, et donc la dérivée s'annule nécessairement en 2. Si on prend  $v = 0$ , alors il y a pour choix possible tous les  $x \mapsto \lambda(x-1)(x-3)$ , pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Si  $v \neq 0$ , alors il n'y a aucun choix possible.

**Exercice 10.** 1. Montrons  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$  :

- Inclusion  $\subset$  : soit  $y \in f(A \cup B)$ . Il existe  $x \in A \cup B$  tel que  $y = f(x)$ . Si  $x \in A$ , alors  $y \in f(A)$ ; et si  $x \in B$  alors  $y \in f(B)$ . Donc dans tous les cas  $y \in f(A) \cup f(B)$ .

- Inclusion  $\supset$  : soit  $y \in f(A) \cup f(B)$ . Alors si  $y \in f(A)$ , il existe  $x_1 \in A$  tel que  $y = f(x_1)$ . Et alors  $x_1 \in A \cup B$ , et donc  $y \in f(A \cup B)$ . Et si  $y \in f(B)$ , alors il existe  $x_2 \in B$  tel que  $y = f(x_2)$ , et donc  $x_2 \in A \cup B$  donc  $y \in f(A \cup B)$  aussi. Dans tous les cas,  $y \in f(A \cup B)$ .
2. • Montrons qu'on a toujours  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$  :
- Soit  $y \in f(A \cap B)$ . Il existe  $x \in A \cap B$  tel que  $f(x) = y$ . D'une part  $x \in A$ , donc  $y \in f(A)$ . Et d'autre part  $x \in B$ , donc  $y \in f(B)$ . Donc  $y \in f(A) \cap f(B)$ .
- Remarque : dans l'autre sens, on n'y arrive pas... Soit  $y \in f(A) \cap f(B)$ . Alors  $y \in f(A)$ , donc il existe  $x_1 \in A$  tel que  $y = f(x_1)$ . Et  $y \in f(B)$ , donc il existe  $x_2 \in B$  tel que  $y = f(x_2)$ . Sans hypothèse supplémentaire on ne peut pas montrer que  $x_1 = x_2 \in A \cap B$ . On peut même très bien avoir  $A \cap B = \emptyset$  mais avec  $A, B$  ayant même image par  $f$  auquel cas  $f(A \cap B) = \emptyset$  mais  $f(A) = f(B)$  est non vide.
  - Contre-exemple concret :  $f$  est l'application  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2$ ,  $A = ]-\infty, 0]$  et  $B = [0, +\infty[$ . Alors  $f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$ , mais  $f(A) = f(B) = [0, +\infty[$  donc  $f(A) \cap f(B) = [0, +\infty[$ .
3. Supposons  $f$  injective, montrons qu'alors on a bien  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  :
- Par le raisonnement ci-dessus on a bien toujours  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ .
  - Montrons  $f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$  : soit  $y \in f(A) \cap f(B)$ , alors comme on l'a dit d'une part  $y \in f(A)$  donc il existe  $x_1 \in A$  tel que  $y = f(x_1)$ , et d'autre part  $y \in f(B)$  donc il existe  $x_2 \in B$  tel que  $y = f(x_2)$ . Mais de  $y = f(x_1) = f(x_2)$ , et de l'injectivité de  $f$ , on tire  $x_1 = x_2$ . Cet élément est donc à la fois dans  $A$  et dans  $B$ , donc est dans  $A \cap B$ , et  $y$  est son image donc  $y \in f(A \cap B)$ .
4. Démontrons la réciproque : si  $f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$  est vraie pour toutes parties  $A, B$  de  $E$  alors  $f$  est injective. Soient  $x_1, x_2 \in E$ , supposons  $f(x_1) = f(x_2)$ . Appliquons cette propriété à  $A = \{x_1\}$  et  $B = \{x_2\}$ , qui nous donne que  $f(A) \cap f(B)$  est un ensemble à un seul élément inclus dans  $f(A \cap B)$ , et donc  $f(A \cap B)$  ne peut pas être vide et donc  $A \cap B$  non plus et donc c'est que  $x_1 = x_2$ .