TD 11 correction
Dénombrement

Exercice 13. 1. D'abord quelques exemples :

- Une application de $[\![1,1]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ correspond exactement au choix d'un seul élément de $[\![1,n]\!]$, il y en a n.
- Une application strictement croissante de $[\![1,2]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ correspond au choix de deux éléments $i<j$ de $[\![1,n]\!]$ ($i=f(1)$, $j=f(2)$). Le nombre de tels choix est exactement $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$: parmi les $n(n-1)$ choix de couples (i,j) avec $i\neq j$, la moitié seulement auront $i<j$.
- Une applications strictement croissante de $[\![1,3]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ correspond au choix de trois éléments $i<j<k$ ($i=f(1)$, $j=f(2)$, $k=f(3)$). Le nombre de tels choix est $\binom{n}{3}$, car étant donné 3 élements de $[\![1,n]\!]$, il y a une unique façon de les mettre dans l'ordre pour que i soit le plus petit, j le second, et k le troisième.

Plus généralement le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est exactement $\binom{n}{p}$: il suffit de choisir une partie à p éléments de $[\![1,n]\!]$ et de les ranger dans l'ordre, alors le plus petit sera $f(1)$, le second sera $f(2)$, etc.

2. Soit f une applications croissante de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$. Montrons que $\tilde{f}:k\mapsto f(k)+k-1$ est strictement croissante de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n+p-1]\!]$ (réciproquement, alors $f(k)=\tilde{f}(k)-k+1$). Pour deux indices $i<j$ de $[\![1,p]\!]$, alors $\tilde{f}(i)=f(i)+i-1$, $\tilde{f}(j)=f(j)+j-1$, et on sait par hypothèse $f(i)\leqslant f(j)$, on déduit donc bien $\tilde{f}(i)<\tilde{f}(j)$. Et sachant $1\leqslant k\leqslant p$ et $1\leqslant f(k)\leqslant n$ on déduit bien $1\leqslant\tilde{f}(k)\leqslant n+p-1$. Il y a donc autant d'applications croissantes $[\![1,p]\!]\to[\![1,n]\!]$ que d'applications strictement croissantes $[\![1,p]\!]\to[\![1,n+p-1]\!]$: ce nombre est donc $\binom{n+p-1}{p}$.

   L'idée est que la transformation $f\mapsto\tilde{f}$ « augmente les écarts » : si f prend deux fois de suite la même valeur ($f(i)=f(i+1)$) alors on aura $\tilde{f}(i+1)=\tilde{f}(i)+1$, de telle sorte que $\tilde{f}$ est toujours strictement croissante, et qu'on puisse en fait retrouver f à partir de $\tilde{f}$.

3. Dans la première situation : l'ensemble des fonctions strictement croissantes $[\![1,p]\!]\to[\![1,n]\!]$ est en bijection avec l'ensemble des parties à p éléments de $[\![1,n]\!]$. La bijection est d'associer à une telle application son image directe.

   Dans la deuxième situation, la transformation $f\mapsto\tilde{f}$ est une bijection entre les applications croissantes $[\![1,p]\!]\to[\![1,n]\!]$, et les applications strictement croissantes $[\![1,p]\!]\to[\![1,n+p-1]\!]$.