TD 18 correction
Polynômes

Exercice 12. 1. • $n = 0$: on pose $P_0(x) = 1$.
- Si on a P_n tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = P_n(x)(1+x^2)^{-(n+1)}$ alors, dérivant comme un produit, on trouve

$$f^{(n+1)}(x) = P_n'(x) \times (1+x^2)^{-(n+1)} - (n+1)P_n(x) \times 2x \times (1+x^2)^{-(n+2)} \quad (1)$$

ce qui se ré-écrit aussi

$$f^{(n+1)}(x) = \Big(\underbrace{(1+x^2)P_n'(x) - 2(n+1)xP_n(x)}_{P_{n+1}(x)}\Big)(1+x^2)^{-(n+2)} \quad (2)$$

2. On démontre aisément par récurrence que P_n est de degré inférieur ou égal à n : P_0 est bien de degré 0, et si P_n est de degré inférieur à n alors ci-dessus d'un côté P_n' est de degré inférieur à $n-1$, donc $(1+x^2)P_n'(x)$ est degré inférieur à $n+1$; de l'autre côté $xP_n(x)$ est de degré inférieur à $n+1$. La somme est donc de degré inférieur à $n+1$ aussi.
3. La formule pour P_{n+1} est une somme de deux polynômes de même degré. Sans plus d'information sur le coefficient dominant, on ne peut pas conclure sur le degré de la somme…
   On doit donc démontrer par récurrence que P_n est de degré n, notons a_n son coefficient dominant. D'abord $a_0 = 1$. Et dans la relation définissant P_{n+1}, si $P_n(x) = a_n x^n + \cdots$ alors, ne gardant que les coefficients dominants,

$$P_{n+1} = nx^2\Big(a_n x^{n-1} + \cdots\Big) - 2(n+1)x\Big(a_n x^n + \cdots\Big) \quad (3)$$

   Le coefficient de x^{n+1} est alors $na_n - 2(n+1)a_n$ c'est-à-dire $-(n+2)a_n$. Ceci ne s'annule pas si a_n ne s'annule pas.
   Cela démontre à la fois que P_n est bien de degré n, et que son coefficient dominant vérifie la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -(n+2)a_n$. On trouve par suite $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n(n+1)!$.

Exercice 13. 1. D'une part

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a^3 + bx^2 + cx + d \quad (4)$$

et d'autre par

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) &= a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) && (5)\\ &= ax^3 - a(\alpha+\beta+\gamma) + a(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma) - a\alpha\beta\gamma && (6)\end{aligned}$$

L'identification des coefficients donne

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma = \frac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} \end{cases} \quad (7)$$

2. On écrit
$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 + 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma) \quad (8)$$
   qui donne $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (-\frac{b}{a})^2 - 2\frac{c}{a}$
3. On écrit
$$\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \quad (9)$$
   qui donne $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -\frac{c}{d}$.
4. À partir de ce système, on forme le polynôme $P : x \mapsto x^3 - 5x^2 + 8x - 4$. Le système (S) est **équivalent** à la condition que α, β et γ soient les trois racines de P.
   On trouve $P(x) = (x-1)(x-2)^2$, de racines 1 (simple) et 2 (double). Comme on peut permuter les racines, les solutions pour le triplet (α, β, γ) sont $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$ et $(2, 2, 1)$.

Exercice 14. On fixe (p, q). Si x est racine multiple alors $0 = P'(x) = 3x^2 + p$, donc (si $p \neq 0$) c'est $x = \sqrt{-\frac{p}{3}}$. On reporte dans P, on a alors

$$P(x) = -\frac{p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q \quad (10)$$

qui est égal à

$$P(x) = \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} + q \quad (11)$$

p est nécessairement négatif ; ceci s'annule si et seulement si $-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}} = q$; élevant au carré des deux côtés on arrive bien à $-4p^3 = 27q^2$.
Le cas $p = 0$ doit être traité à part, mais c'est rapide : pas de racine double si $q \neq 0$, et sinon, c'est $P(x) = x^3$ dont 0 est racine triple. On a donc bien, encore, $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Exercice 15. Il est facile de vérifier que $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ se factorise par x si et seulement si $a_0 = 0$, auquel cas $P(x) = \sum_{k=1}^n a_k x^k = x\sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}x^j$. Plus généralement, on peut factoriser par x^r si et seulement si $a_0 = \cdots = a_{r-1} = 0$. Ceci démontre automatiquement que l'ordre de multiplicité de 0 comme racine de P est le maximum des r tel que les coefficients $a_0, ..., a_{r-1}$ soient nuls. Ceux-ci sont, à des multiples près, les dérivées de P en 0 : on trouve $P(0) = a_0$, $P'(0) = a_1$, $P''(0) = 2a_2$

$$\begin{aligned}
P(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k + \cdots + a_nx^n && (12)\\
P(0) &= a_0 && (13)\\
P'(x) &= a_1 + 2a_2x + \cdots + ka_kx^{k-1} + \cdots + na_nx^{n-1} && (14)\\
P'(0) &= a_1 && (15)\\
P'(x) &= 2a_2 + \cdots + k(k-1)a_kx^{k-2} + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} && (16)\\
P'(0) &= 2a_2 && (17)\\
& && (18)
\end{aligned}$$

et dans le cas général $P^{(k)}(0) = k!a_k$, qui est non-nul si et seulement si a_k est non-nul.
Dans le cas où on étudie une racine α quelconque, on pose $Q : x \mapsto P(x + \alpha)$. Alors 0 est racine de Q si et seulement si α est racine de P (remplacer tout simplement x par 0) et alors $P(x) = Q(x - \alpha)$. Ainsi, α est racine de P si et seulement si on peut écrire $Q(x) = x \times R(x)$ c'est-à-dire $P(x) = (x - \alpha) \times R(x - \alpha)$: ceci factorise P par $x - \alpha$.
Idem pour une racine multiple, on peut écrire $Q(x) = x^r R(x)$ si et seulement si on peut écrire $P(x) = (x - \alpha)^r R(x - \alpha)$ c'est-à-dire si et seulement si α est racine d'ordre au moins r de P.
Mais les dérivées de P en α sont les mêmes que les dérivées de Q en 0, tout simplement par la formule de dérivée d'une composée $Q'(x) = P'(x+\alpha)$ (puis évaluer en 0), et idem pour les dérivées supérieures. Ceci démontre que α est racine d'ordre au moins r de P si et seulement si les r premières dérivées de P en 0 s'annulent : $P(\alpha) = 0$, $P'(\alpha) = 0$, ..., $P^{(r-1)}(\alpha) = 0$.
Ce dernier résultat peut aussi se démontrer par récurrence, en poursuivant la preuve du cours α est racine d'ordre au moins 2 de P si et seulement si $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) = 0$.