TD 21 correction
Limites de fonctions

Exercice 1.
- $A = +\infty$ (gros gendarme)
- $B = 0$ (nulle pour x assez grand)
- $C = +\infty$ (gendarmes + comparaisons usuelles)
- D : limites 0 à droite et 1 à gauche
- E : limites 1 en $+\infty$ et -1 en $-\infty$
- $F = \cos(1)$ (limites à droite et à gauche)
- $G = 1$ (gendarmes)
- $H = 0$ (gendarmes)
- I : pas de limite ; introduire les suites $u_k = \ln(2k\pi)$ et $v_k = \ln(\pi + 2k\pi)$

Exercice 2.
- $A = 1$ (écrire $\exp(x\ln(x))$ + comparaisons usuelles)
- B : limites $+\infty$ en $+\infty$ et 0 en $-\infty$ (gendarmes + composition)
- $C = \pi/2$ (composition)
- $D = 1/2$ (quantités conjuguées des racines)
- $E = 0$ (écrire $(x^{1/3}\ln(x))^3$)
- $F = +\infty$ (faire apparaitre $\exp(x\ln(2))/(x\ln(2))^2$)

Exercice 3.
- $A = +\infty$
- $B = 0$
- $C = 25/8$
- $D = -2$ (réflexe : poser $x = 1 + h$)
- $E = e^{-1}$ (avec $\frac{1}{1+x} = 1 + \frac{-x}{1+x}$ et passer par l'exponentielle)
- $F = \sqrt{2}/4$ (poser $x = \pi/4 + h$ + formules de trigonométrie)

Exercice 4.
- $f_1(x) \sim_{x\to 0} 2$
- $f_2(x) \sim_{x\to 0} 1/x^3$
- $f_3(x) \sim_{x\to 0} -x^2/2$ (écrire $f_3(x) = \ln(1+u)$ avec $u = \cos(x) - 1$)
- $f_4(x) \sim_{x\to 0} -x^4/4$ (écrire $f_4(x) = \sqrt{1+u} - 1$ avec $u = \cos(x^2) - 1$)

Exercice 5.
- $f_1(x) \sim_{x\to+\infty} x^2$ (factoriser par x^2 en justifiant que c'est celui-ci qui domine)
- $f_2(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$ (factoriser par x puis regrouper les ln : $x(\ln(1 + 1/x^2)))$)
- $f_3(x) \sim_{x\to+\infty}\sim \frac{1}{2e^x}$ (factoriser par e^{2x} sous la racine : $e^x(\sqrt{1 + 1/e^{2x}} - 1)$
- $f_4(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2}$ (écrire $\ln(1+u)$ avec $u = 3x/(x^3+1)$)

Exercice 7. Supposons f périodique. Par définition il existe un nombre $T > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(x + nT) = f(x)$. Supposons que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe et soit égal à un $\ell \in \mathbb{R}$.
On fixe d'abord $x_0 \in \mathbb{R}$ et on ré-écrit une fois de plus

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x_0) = f(x_0 + nT) \tag{1}$$

puis on fait tendre n vers $+\infty$: le terme de droite tend alors vers ℓ (composition suites-fonctions) et donc on en déduit $f(x_0) = \ell$. Ceci valable pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, donc f est constante égale à ℓ.

Exercice 8.
1. Il suffit d'écrire le quotient :
$$\frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = e^{f(x)-g(x)} \tag{2}$$
et donc $\lim_{x\to a} \frac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} = 1$ si et seulement si $\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = 0$.
2. Il faut séparer plusieurs cas :
   - Si la limite $\ell \neq 0, 1, +\infty$: alors $f(x) \sim_{x\to a} g(x)$ signifie exactement que f et g ont la même limite en a et de même leurs ln sont non-nuls et $\ln(f(x)) \sim_{x\to a} \ln(g(x))$ signifie exactement que $\ln(f)$ et $\ln(g)$ ont la même limite en a.
   - Pour la limite $\ell = +\infty$: on suppose $f(x) \sim_{x\to a} g(x)$ et on écrit (garder en tête un exemple, comme la méthode pour montrer $\ln(x+1) \sim_{x\to+\infty} \ln(x)$)
$$\begin{aligned}\ln(f(x)) &= \ln\Big(g(x) + (f(x) - g(x))\Big) = \ln\left(g(x)\left(1 + \frac{f(x)-g(x)}{g(x)}\right)\right) \\ &= \ln(g(x)) + \ln\left(1 + \frac{f(x)-g(x)}{g(x)}\right)\end{aligned} \tag{3}$$
   Or par définition $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ et donc $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0$ et ainsi $\lim_{x\to a} \ln\left(1 + \frac{f(x)-g(x)}{g(x)}\right) = 0$. On obtient en divisant $\lim_{x\to a} \frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = 1$, c'est ce qu'on voulait.
   - Pour $\ell = 0$: similaire ; ou on peut s'y ramener en considérant $\frac{1}{f(x)} \sim_{x\to a} \frac{1}{g(x)}$.