TD 26 correction
Applications linéaires

Exercice 8

Commençons par quelques remarques :

- On a toujours $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$. En effet, $\vec{u} \in \text{Ker}(f)$ signifie $f(\vec{u}) = \vec{0}_E$ et on a alors $f(f(\vec{u})) = \vec{0}_E$ donc $\vec{u} \in \text{Ker}(f^2)$.
- On a toujours $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$. En effet, $\vec{v} \in \text{Im}(f^2)$ signifie qu'il existe un $\vec{u} \in E$ tel que $\vec{v} = f(f(\vec{u}))$, et alors $\vec{v}$ est l'image par f de $f(\vec{u})$.
- Thérème du rang pour f et pour f^2 :

$$\begin{aligned} \dim(E) &= \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \\ \dim(E) &= \dim(\text{Ker}(f^2)) + \dim(\text{Im}(f^2)) \end{aligned}$$

Démontrons alors l'équivalence entre (i) et (ii) :

Supposons (i) : $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$. Alors $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\text{Ker}(f^2))$ et on déduit par la formule ci-dessus $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Im}(f^2))$. Mais sachant déjà $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ on en déduit alors l'égalité $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f)$ (théorème de l'égalité automatique quand on a une inclusion entre deux sous-espaces vectoriels de même dimension). Ceci montre (ii).

De même, supposons (ii) : $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$. Par le même raisonnement on déduit tout de suite $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\text{Ker}(f^2))$ et sachant qu'on a déjà une inclusion $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ alors c'est une égalité $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$. Ceci montre (i).

Il reste à démontrer l'équivalence par exemple avec (iii), par exemple entre (i) et (iii).

Supposons (i), montrons (iii). Soit un vecteur $\vec{u} \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. Alors d'une part $f(\vec{u}) = \vec{0}_E$. D'autre part il existe un $\vec{v} \in E$ tel que $\vec{u} = f(\vec{v})$. Alors $f(\vec{u}) = f(f(\vec{v}))$. Ceci montre que $\vec{v} \in \text{Ker}(f^2)$. Par l'hypothèse (i), alors $\vec{v} \in \text{Ker}(f)$. Et donc $\vec{u} = f(\vec{v}) = \vec{0}_E$. Cela démontre (iii).

Supposons (iii), montrons (i). On doit démontrer l'égalité d'ensembles $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$, et l'inclusion $\subset$ est toujours vraie donc il faut démontrer l'autre. Soit donc $\vec{u} \in \text{Ker}(f^2)$. Alors l'élément $f(\vec{u})$ est à la fois dans $\text{Ker}(f)$ et dans $\text{Im}(f)$, donc par l'hypothèse (iii), alors $f(\vec{u}) = \vec{0}_E$. Cela signifie que $\vec{u} \in \text{Ker}(f)$, donc on a démontré $\text{Ker}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$.

Exercice 9

1. Il s'agit de montrer que pour deux polynômes P et Q, et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda P + Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$. En effet :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(\alpha_0), ..., (\lambda P + Q)(\alpha_n)) \\ &= (\lambda P(\alpha_0) + Q(\alpha_0), ..., \lambda P(\alpha_n) + Q(\alpha_n)) \\ &= \lambda(P(\alpha_0), ..., P(\alpha_n)) + (Q(\alpha_0), ..., Q(\alpha_n)) \\ &= \lambda\varphi(P) + \varphi(Q) \end{aligned}$$

2. Soit $P \in \text{Ker}(\varphi)$. Cela signifie que $P(\alpha_0) = \cdots = P(\alpha_n)$, ainsi les $(\alpha_0, ..., \alpha_n)$ forment $n+1$ racines de P deux à deux distinctes, mais P est de degré au plus n, donc P est le polynôme nul ! Ainsi $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$.
3. L'application φ est linéaire injective de E vers $\mathbb{R}^{n+1}$. Or E est aussi de dimension $n+1$. Donc φ est automatiquement bijective (conséquence du théorème du rang : la dimension de l'image est égale à $n+1$, donc c'est tout $\mathbb{R}^{n+1}$). Cela signifie précisément le théorème de Lagrange : pour tout $(\beta_0, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in E$ tel que $\forall 0 \leqslant i \leqslant n$, $P(\alpha_i) = \beta_i$.
4. (a) Si $j \neq i$ alors le calcul de $L_i(\alpha_j)$ fait intervenir un terme nul dans le produit, et donc automatiquement $L_i(\alpha_j) = 0$. Mais si $j = i$ alors par définition $L_i(\alpha_j) = 1$ (c'est un quotient de deux produits égaux).
   (b) Posons $P = \sum_{i=0}^{n} \beta_i L_i$. Par définition, à cause de la question précédente, dans le calcul de $P(\alpha_j)$ un seul terme est non-nul et $P(\alpha_j) = \beta_j \times L_j(\alpha_j)$ soit $P(\alpha_j) = \beta_j$. Par unicité, c'est bien le polynôme P qu'on cherche.