TP 26 correction
Intégration numérique

I.5 Estimation de l'erreur

Exercice 4 (Mathématiques)**.** Rappel des notations : f est $\mathcal{C}^1$ sur $I = [a, b]$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ ($k \in [\![0, n]\!]$) avec $x_0 = a$ et $x_n = b$, et $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$.

1. On travaille d'abord sur $[a, b]$ sans subdiviser.
   (a) La fonction f est $\mathcal{C}^1$ donc f' est continue sur tout $[a, b]$, qui est fermé borné non-vide. Donc par le théorème des bornes, f' est bornée.
   (b) On prend $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $|f'(x)| \leqslant M$. Théorème des accroissements finis pour f appliqué entre a et x (en prenant $x > a$) : il existe $c_x \in \,]a, x[$ tel que $f(x) - f(a) = (x - a)f'(c_x)$. Donc $|f(x) - f(a)| = |x - a| \times |f'(c_x)|$. Or $|f'(c_x)| \leqslant M$ et $x - a \geqslant 0$. Donc $|f(x) - f(a)| \leqslant (x - a)M$.
   Dans le cas $x = a$ on ne peut pas appliquer le théorème des accroissements finis, mais l'inégalité est bien vraie.
   (c) D'abord on remarque que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)f(a) = \int_a^b (f(x) - f(a))\,\mathrm{d}x$$

(on considère $f(a)$ comme une fonction constante, qu'on intègre sur $[a, b]$). Puis par l'inégalité triangulaire

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)f(a) \right| \leqslant \int_a^b |f(x) - f(a)|\,\mathrm{d}x$$

et par la croissance de l'intégrale en utilisant la question précédente

$$\int_a^b |f(x) - f(a)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b (x-a)M\,\mathrm{d}x$$

Ce dernier terme se calcule avec une primitive :

$$\int_a^b (x-a)M\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(x-a)^2 M}{2} \right]_a^b = \frac{(b-a)^2 M}{2}$$

2. (a) D'une part

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,\mathrm{d}x$$

(ce sont des intégrales de fonctions constantes). D'autre part, la relation de Chasles (en version symbole $\sum$) se lit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

En réunissant ces deux sommes :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k)\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k))\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

(b) On applique deux fois successivement l'inégalité triangulaire, la première fois pour $\sum$ et la deuxième fois pour $\int$:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x)-f(x_k))\,\mathrm{d}x\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x)-f(x_k))\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x)-f(x_k)|\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

(c) On applique maintenant l'inégalité de la première partie de l'exercice : sur $[x_k, x_{k+1}]$, f est toujours $\mathcal{C}^1$ et f' est toujours majorée par M (qui est le majorant sur $[a,b]$), la longueur de l'intervalle étant cette fois $\frac{b-a}{n}$ au lieu de $b-a$:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x)-f(x_k)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2 M}{2n^2}$$

donc on sommant

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^2 M}{2n^2}$$

Mais à droite ceci est une somme de n termes tous égaux, donc la somme donne $\frac{(b-a)^2 M}{2n}$. Attention à ne pas arnaquer, c'est bien dans cet ordre là : d'abord une majoration en $1/n^2$ sur chaque intervalle, puis en $1/n$ quand on somme. Cela explique pourquoi quand on somme des rectangles donnant chacun une approximation de plus en plus précise de l'intégrale, qui sont de plus en plus fins, mais qu'on en somme de plus en plus, alors le résultat converge vers l'intégrale…

En conclusion

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2 M}{2n} \tag{1}$$